

Novas técnicas de análise de sinal nas Ciências da Natureza

Rui Vilela Mendes

*Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais,
Universidade de Lisboa*

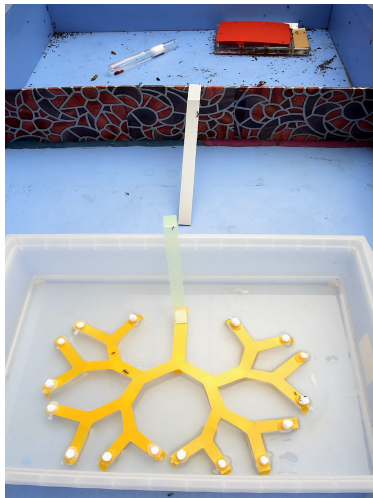
<http://label2.ist.utl.pt/vilela/>

Fevereiro 2014

- O processamento de sinal como compressão de informação
 - Transformações integrais: lineares e bilineares
 - Tomografia não-comutativa
 - Algumas aplicações da tomografia $t - \omega$ (tempo - frequência)
- 1 Deteção de sinais residuais
 - 2 Filtragem e separação de componentes
 - 3 Reflectometria
- Filtragem adaptada
 - Processamento de sinais em grafos
 - Recolha de sinais e amostragem aleatória

- Nas ciências da natureza e na experiência diária os sinais que recebemos não são, em geral, reconhecidos na sua forma original. Precisamos de extrair deles padrões inteligíveis.
- Exemplos: As ondas do mar, a extração dos ritmos (análise de frequência), etc.
- A extração de padrões é compressão de informação. É um paradigma que parece ser comum a todos os seres vivos. Quanto mais complexo o sinal, mais difícil a extração dos padrões.
- As experiências de Ryabko e Reznikova (arXiv: 0912.4649)

Aprendizagem e transmissão de informação



Aprendizagem e transmissão de informação



No Sequences Mean Duration(sec.)

1	LL	72
1	RRR	75
2	LLLLL	84
3	RRRRR	78
4	LLLLL	90
5	RRRRRR	88
6	LRLRLR	130
8	RLRLRL	135
9	LLR	69
10	LRLL	100
11	RLLR	120
12	RRLRL	150
13	RLRRRL	180
14	RRLRRR	220
15	LRLRL	200

Transformações integrais

Transformações lineares: Fourier, Wavelets, Hilbert, ...

Transformações bilineares: Wigner-Ville, Bertrand, ...

Formulação geral

Consideremos os sinais $f(t)$ como vectores $|f\rangle$ num espaço (Hilbert, nuclear, etc.)

Seja $|h\rangle$ um vector de referência e $\{U(\alpha)\}$ uma família de operadores que aplicados a $|h\rangle$ geram uma base completa (no espaço de Hilbert ou no dual do espaço nuclear).

Uma **transformada linear** é simplesmente a projecção do sinal nessa base, isto é

$$F(\omega) = (U(\omega) h, f) = \int dt U(\omega) h(t) f(t)$$

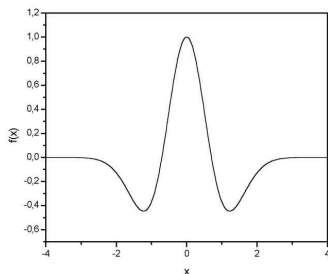
Para a *transformada de Fourier*

$$h = 1 \xrightarrow{U(\omega)} U(\omega) 1 = e^{i\omega t}$$

A transformada de Fourier extrai as *periodicidades* existentes no sinal.

Análise de sinal e transformações integrais

Para as *wavelets* $h(x)$ é por exemplo



e U é o operador que translata e expande ou comprime esta função:

$$U(a, b) h(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$F(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int h\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt$$

Transformadas lineares e bilineares

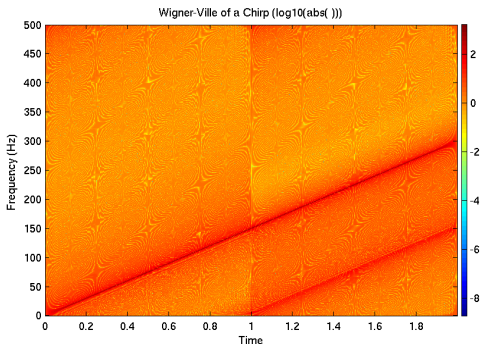
Transformadas bilineares

$$W(t, \omega) = (U(t, \omega) f, f)$$

Exemplo: Transformada de Wigner-Ville

$$W(t, \omega) = \int f^* \left(t + \frac{\tau}{2} \right) f \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Wigner-Ville dum chirp: $\exp(it(\omega_0 + t\alpha))$



Transformadas lineares e bilineares

- As transformadas bilineares tentam obter informação simultânea no tempo e na frequência. Porém estas são informações incompatíveis.
- A informação no tempo é necessariamente local, enquanto que uma frequência bem definida corresponde a um sinal periódico ao longo de todo o tempo. Em termos de operadores o tempo está associado a t a frequência a $\frac{d}{dt}$

$$t \{ \delta(t - a) \} = a \{ \delta(t - a) \}$$
$$i \frac{d}{dt} \{ e^{-i\omega t} \} = \omega \{ e^{-i\omega t} \}$$

- A incompatibilidade de informação precisa e simultânea no tempo e na frequência resulta da não-comutatividade de t e $\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt} t = t \frac{d}{dt} + 1 \neq t \frac{d}{dt}$$

Isto significa que não é possível ter uma imagem precisa do plano $t - \omega$, porém nada nos impede de explorar este plano numa direção de cada vez.

Tomograma tempo-frequência

Somos assim levados a uma **abordagem tomográfica (não-comutativa)** associada ao operador $B(\mu, \nu) = \mu t + i\nu \frac{d}{dt}$

Tomograma ou transformada tomográfica

$$M_f(\mu, \nu, X) = (f, \delta(B(\mu, \nu) - X)f) = |(\psi_X, f)|^2$$

$M_f(\mu, \nu, X)$ é positivo, podendo ser interpretado como uma densidade de probabilidade. Permite analisar os aspectos temporais e de frequência sem os problemas de interpretação das transformadas bilineares.

- O tomograma tempo-frequência é uma projeção do sinal nos vectores próprios do operador $B(\mu, \nu) = \mu t + i\nu \frac{d}{dt}$
 $B(\mu, \nu) \psi_1(\mu, \nu, t, X) = X \psi_1(\mu, \nu, t, X)$

$$\psi_1(\mu, \nu, t, X) = \exp i \left(\frac{\mu t^2}{2\nu} - \frac{tX}{\nu} \right)$$

$$M_f(\mu, \nu, X) = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int \exp \left[\frac{i\mu t^2}{2\nu} - \frac{itX}{\nu} \right] f(t) dt \right|^2$$

Tomografia não-comutativa para outros pares de operadores

Tomograma tempo-frequência

$$B_1 = \mu t + iv \frac{d}{dt}$$

Tomograma tempo-escala

$$B_2 = \mu t + iv \left(t \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \right)$$

Tomograma frequência-escala

$$B_3 = i\mu \frac{d}{dt} + iv \left(t \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \right)$$

Tomograma tempo-conforme

$$B_4 = \mu t + iv \left(t^2 \frac{d}{dt} + t \right)$$

Tomogramas associados ao grupo conforme

Vectores próprios destes operadores

- $B_1\psi_1(\mu, \nu, t, X) = X\psi_1(\mu, \nu, t, X)$

$$\psi_1(\mu, \nu, t, X) = \exp i \left(\frac{\mu t^2}{2\nu} - \frac{tX}{\nu} \right)$$

- $B_2\psi_2(\mu, \nu, t, X) = X\psi_2(\mu, \nu, t, X)$

$$\psi_2(\mu, \nu, t, X) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \exp i \left(\frac{\mu t}{\nu} - \frac{X}{\nu} \log |t| \right)$$

- $B_3\psi_3(\mu, \nu, \omega, X) = X\psi_3(\mu, \nu, \omega, X)$

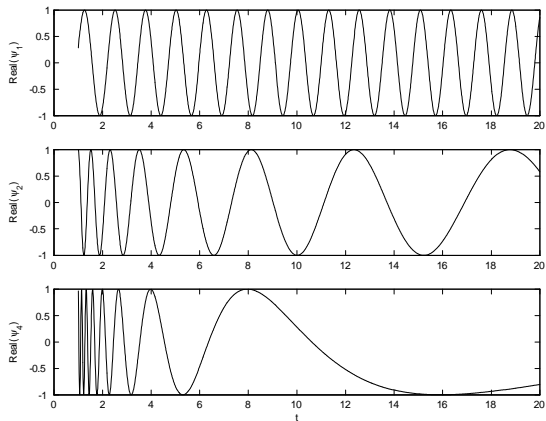
$$\psi_3(\mu, \nu, t, X) = \exp(-i) \left(\frac{\mu}{\nu} \omega - \frac{X}{\nu} \log |\omega| \right)$$

- $B_4\psi_4(\mu, \nu, t, X) = X\psi_4(\mu, \nu, t, X)$

$$\psi_4(\mu, \nu, t, X) = \frac{1}{|t|} \exp i \left(\frac{X}{\nu t} + \frac{\mu}{\nu} \log |t| \right)$$

Tomogramas associados ao grupo conforme

Vectores próprios em $\mu = 0$



Tomogramas associados ao grupo conforme

- Tempo-frequência

$$M_1(\mu, \nu, X) = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int \exp \left[\frac{i\mu t^2}{2\nu} - \frac{itX}{\nu} \right] f(t) dt \right|^2$$

- Tempo-escala

$$M_2(\mu, \nu, X) = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int dt \frac{f(t)}{\sqrt{|t|}} e^{i\left(\frac{\mu}{\nu}t - \frac{X}{\nu} \log |t|\right)} \right|^2$$

- Frequência-escala

$$M_3(\mu, \nu, X) = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int d\omega \frac{f(\omega)}{\sqrt{|\omega|}} e^{-i\left(\frac{\mu}{\nu}\omega - \frac{X}{\nu} \log |\omega|\right)} \right|^2$$

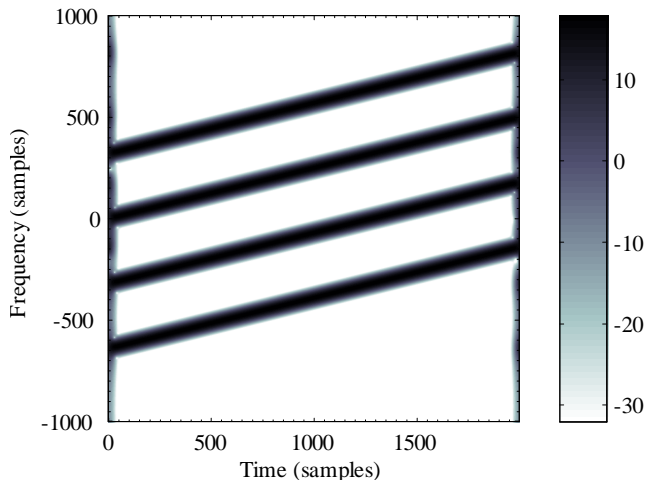
$f(\omega) =$ Transformada de Fourier de $f(t)$

- Tempo-conforme

$$M_4(\mu, \nu, X) = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int dt \frac{f(t)}{|t|} e^{i\left(\frac{X}{\nu t} + \frac{\mu}{\nu} \log |t|\right)} \right|^2$$

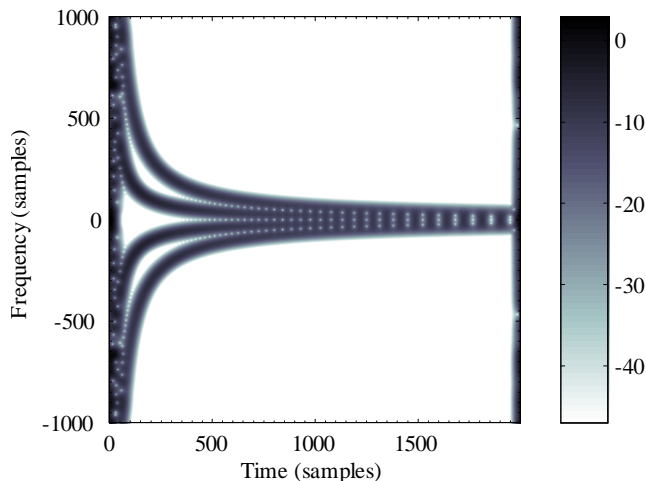
Os tomogramas exploram o plano tempo-frequência ao longo de linhas diversas

Tempo-frequência



Os tomogramas exploram o plano tempo-frequência ao longo de linhas diversas

Tempo-escala



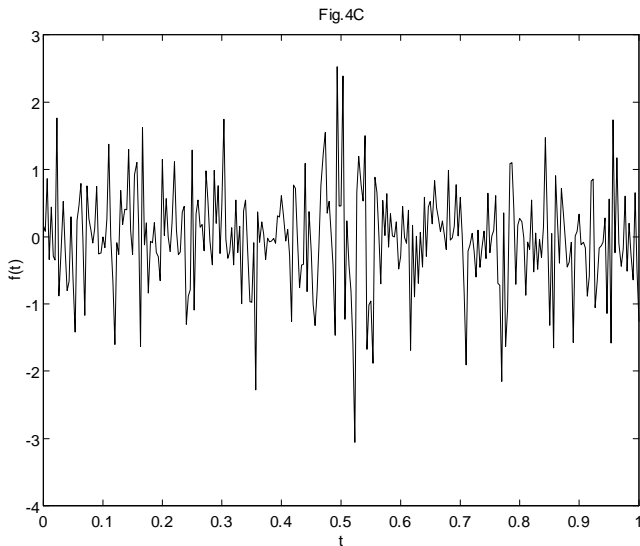
1 - Detecção e separação de pequenos sinais do ruído

- Tempo-frequência, $M_1(\mu, \nu; X)$

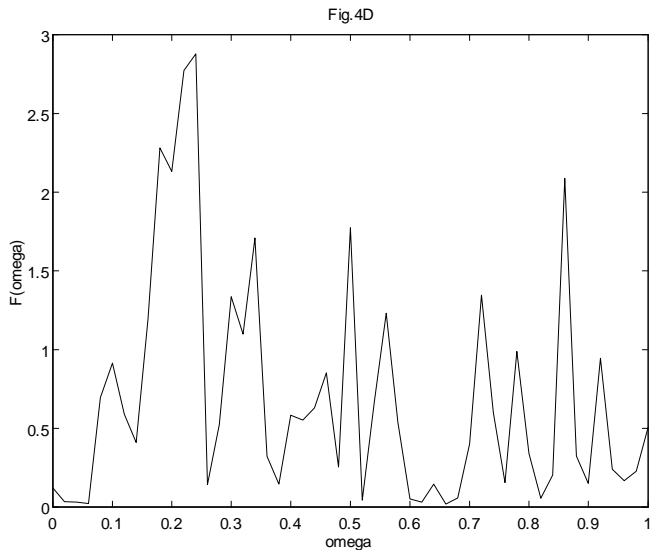
$$\mu = \frac{\cos \theta}{T}, \nu = \frac{\sin \theta}{\Omega}$$

- Exemplo: Sobreposição dum ruído com distribuição aleatória normal na amplitude e na fase com um sinal sinusoidal da mesma amplitude média, mas só durante o tempo 0.45 – 0.55.
A relação sinal ruído é 1/10
- Nas figuras seguintes mostra-se o sinal, a sua transformada de Fourier e o tomograma $M_f(s, \mu, \nu)$ ($T = 1$ and $\Omega = 1000$)

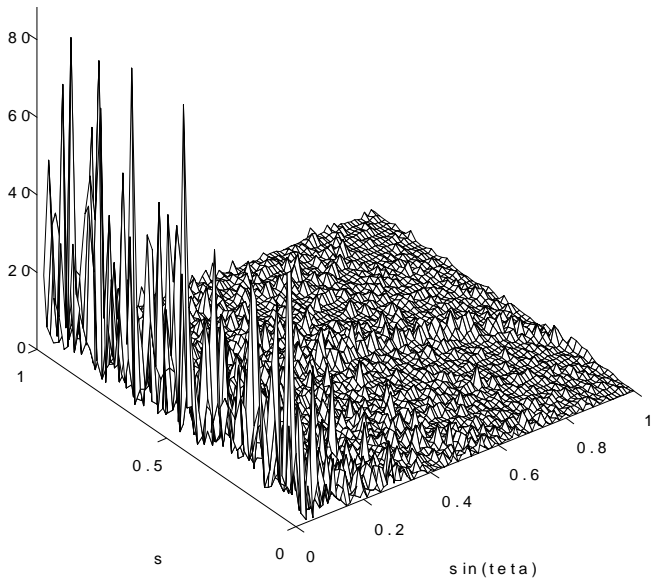
Deteção e separação de pequenos sinais do ruído



Deteção e separação de pequenos sinais do ruído

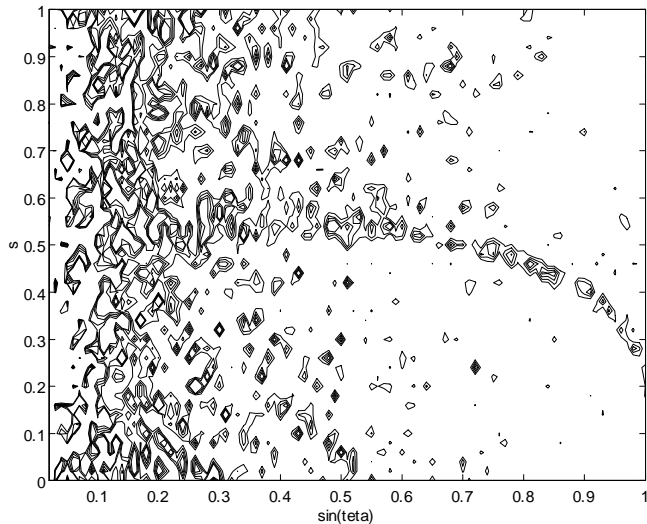


Deteção e separação de pequenos sinais do ruído



Deteção e separação de pequenos sinais do ruído

Fig.4B



Deteção e separação de pequenos sinais do ruído

- Conclusão: Vê-se claramente uma sequência de picos ligando um tempo $t \sim 50$ a uma frequência $\omega \sim 200$.
- A assinatura que o sinal deixa no tomograma é uma manifestação do facto que, apesar da sua baixa razão sinal-ruído, há um certo número de direcções no plano (t, ω) ao longo das quais a deteção é favorável.
- Esta sequência de picos é fiável por causa da rigorosa interpretação probabilística do tomograma $M(\theta, X)$.

Decomposição em componentes

- A maioria dos sinais nas ciências da Natureza são não-estacionários e provenientes de diversas fontes. A separação em componentes é essencial para os tornar inteligíveis.
- A noção de componente não é definida unicamente. Depende das propriedades a que se quer dar maior ênfase.
- Uma técnica possível: Separação de componentes utilizando o comportamento do sinal no plano tempo-frequência. Usamos o tomograma de tempo finito

$$M(\theta, X) = \left| \int f(t) \psi_{\theta, X}(t) dt \right|^2 = |\langle f, \psi \rangle|^2$$

em que

$$\psi_{\theta, X}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp \left(\frac{-i \cos \theta}{2 \sin \theta} t^2 + \frac{iX}{\sin \theta} t \right)$$

$$\mu = \cos \theta, \nu = \sin \theta.$$

Decomposição em componentes

- θ é um parametro que interpola entre os operadores do tempo e da frequência, variando entre 0 e $\pi/2$.
- Para todos os θ 's os operadores $U(\theta)$ são operadores unitariamente equivalentes, portanto as projeções em todos os níveis θ contêm a mesma informação. A separação em componentes baseia-se na procura de um valor de θ intermédio no qual exista um bom compromisso entre a informação temporal e a de frequência.
- Seleciona-se um subconjunto X_n tal que a família de funções $\{\psi_{\theta, X_n}(t)\}$ seja ortogonal e normalizada. Isto é

$$\langle \psi_{\theta, X_n} \psi_{\theta, X_m} \rangle = \delta_{m,n}$$

$$X_n = X_0 + \frac{2n\pi}{T} \sin \theta$$

com X_0 escolhido arbitrariamente (em geral considera-se $X_0 = 0$)

Decomposição em componentes

- As projeções do sinal $f(t)$ nesta família de funções

$$c_{X_n}^\theta(f) = \langle f, \psi_{\theta, X_n} \rangle$$

são então usadas para supressão do ruído e separação de componentes.

- Supressão do ruído é feita eliminando os $c_{X_n}^\theta(f)$ tais que

$$\left| c_{X_n}^\theta(f) \right|^2 \leq \epsilon$$

para um dado ϵ

- A análise de componentes é feita a partir da seleção de subconjuntos \mathcal{F}_k dos X_n 's e reconstruindo os sinais parciais (componentes) por restrição da soma sobre os $\psi_{\theta, X_n}(t)$

$$f_k(t) = \sum_{n \in \mathcal{F}_k} c_{X_n}^\theta(f) \psi_{\theta, X_n}(t)$$

para cada \mathcal{F}_k .

Decomposição em componentes. Exemplos

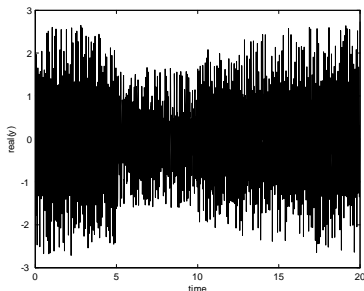
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + b(t)$$

$$y_1(t) = \exp(i25t), t \in [0, 20]$$

$$y_2(t) = \exp(i75t), t \in [0, 5]$$

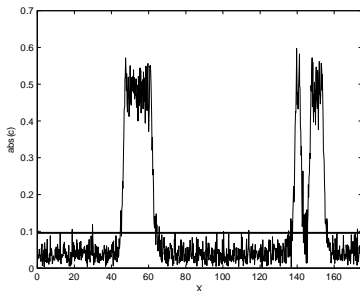
$$y_3(t) = \exp(i75t), t \in [10, 20]$$

O sinal (parte real)



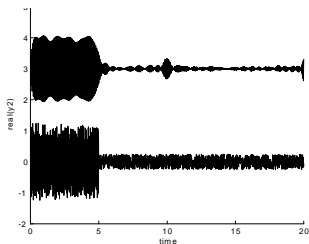
Decomposição em componentes. Exemplos

Separação em $\theta = \frac{\pi}{5}$

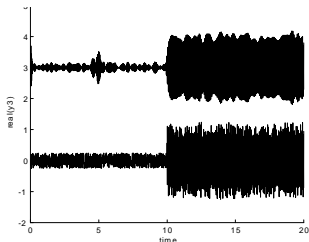


Decomposição em componentes. Exemplos

Reconstrução de $y_2(t)$



e da componente $y_3(t)$

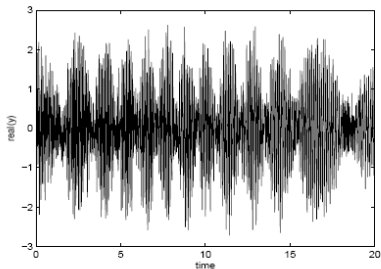


Decomposição em componentes. Exemplos

Soma $y(t) = y_0(t) + y_R(t) + b(t)$ de $y_0(t)$ com um chirp deformado $y_R(t)$ com um atraso de 3s e ruído branco adicionado

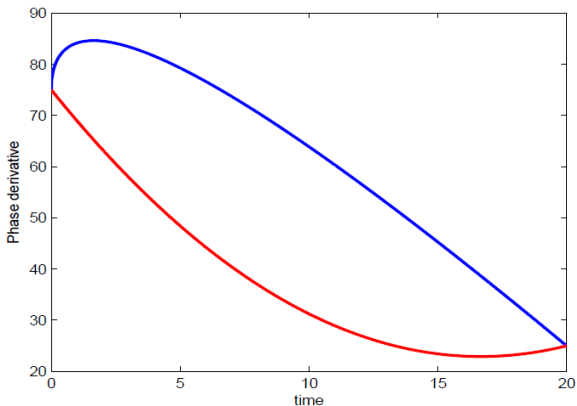
$$y_0(t) = e^{i\Phi_0(t)} \quad y_R(t) = e^{i\Phi_R(t)}$$

$$\Phi_0(t) = a_0 t^2 + b_0 t \text{ e } \Phi_R(t) = a_R(t - t_R)^2 + b_R(t - t_R) + 10(t - t_R)^{\frac{3}{2}}.$$



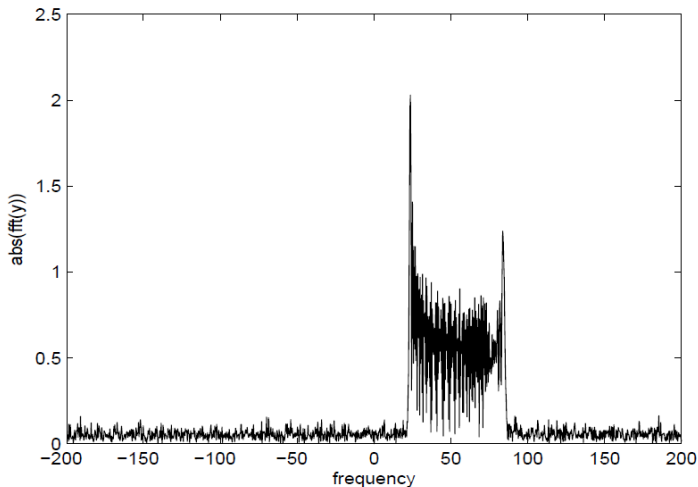
Decomposição em componentes. Exemplos

Comparação das derivadas de fase $\frac{d}{dt}\Phi_0(t)$ and $\frac{d}{dt}\Phi_R(t)$. Exceptuando os três primeiros segundos, o "espectro" dos sinais $y_0(t)$ e $y_R(t)$ é praticamente o mesmo. Separação em frequência impossível.



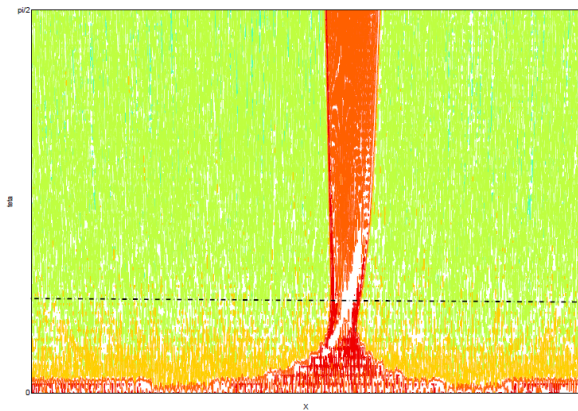
Decomposição em componentes. Exemplos

- Representação em frequência



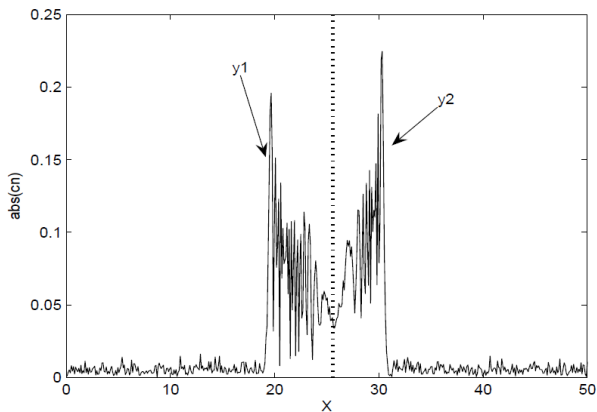
Decomposição em componentes. Exemplos

Tomograma do sinal



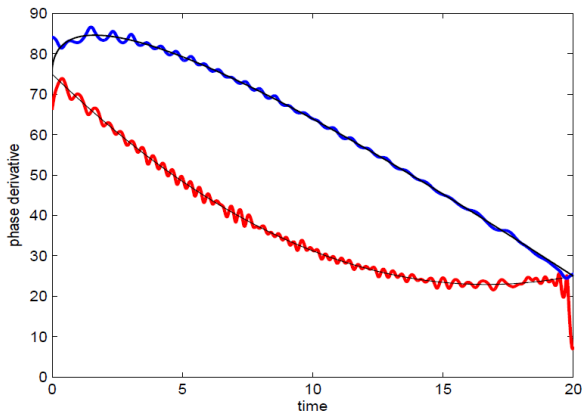
Decomposição em componentes. Exemplos

Corte em $\theta = \frac{\pi}{5}$

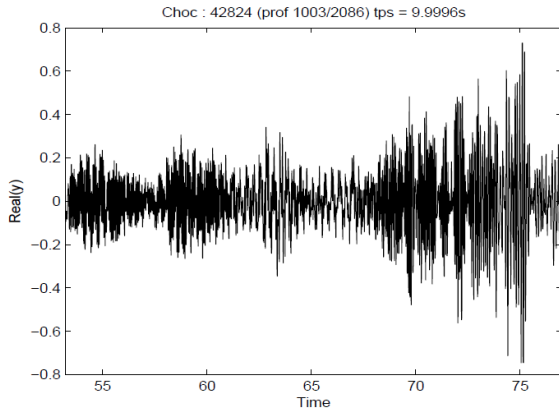


Decomposição em componentes. Exemplos

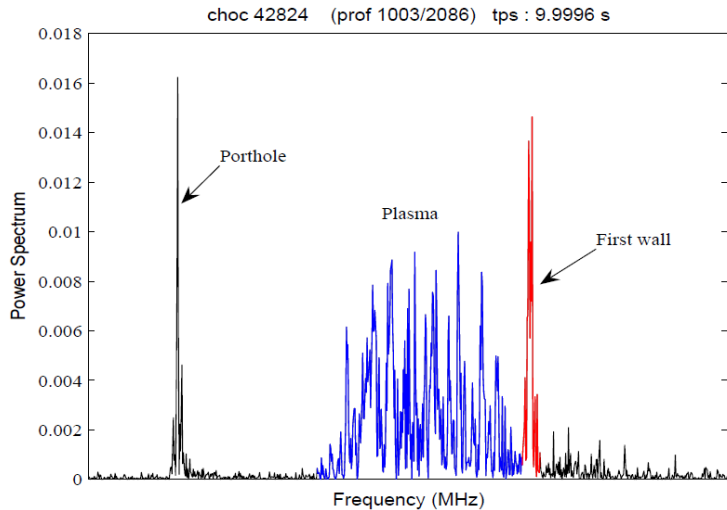
Comparação das derivadas de fase das componentes reconstruídas com as exactas



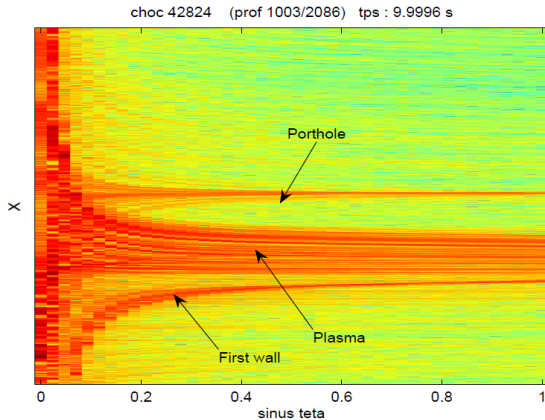
Sinal de reflectometria em plasmas



Decomposição em componentes. Exemplos

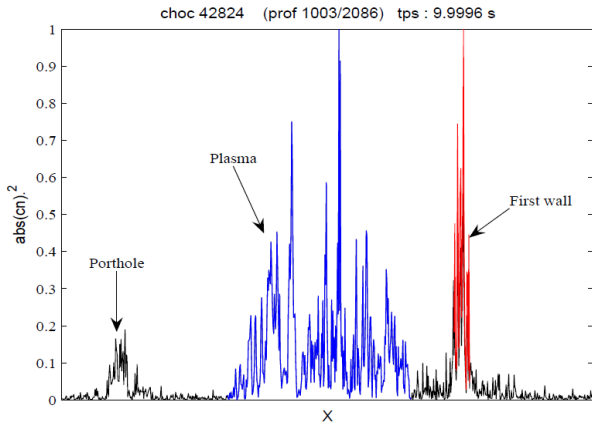


Tomograma do sinal de reflectometria

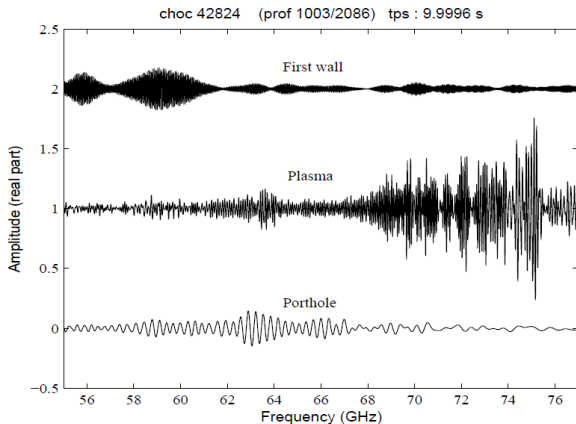


Decomposição em componentes. Exemplos

Corte em $\theta = \pi - \frac{\pi}{5}$



Decomposição em componentes. Exemplos



Tomografia com um par adaptado

- Escolher em $B(\mu, \nu) = \mu t + \nu S$, um operador S , especialmente adaptado para detectar os padrões que se querem extrair do sinal.
- Para construir S considera-se um conjunto de sequências temporais de dimensão N , $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$, contendo os padrões típicos que se pretende detectar no sinal. (Podem ser consideradas como as palavras de código que se pretende detectar no sinal).
- Forma-se uma matrix $k \times N$, $U \in \mathcal{M}_{k \times N}$.

$$U = \begin{pmatrix} x_1(1\Delta t) & x_1(2\Delta t) & \dots & x_1(N\Delta t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_k(1\Delta t) & x_k(2\Delta t) & \dots & x_k(N\Delta t) \end{pmatrix}$$

tipicamente $k < N$.

Tomografia com um par adaptado

- Constroem-se as matrizes $A = U^T U \in \mathcal{M}_{N \times N}$ e $B = U U^T \in \mathcal{M}_{k \times k}$.
- Diagonalização de A fornece k valores próprios $\neq 0$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_j)$, e os correspondentes vectores próprios ortogonais de dimensão N , (Φ_1, \dots, Φ_k) , $\Phi_j \in \mathbb{R}^N$. Do mesmo modo, a diagonalização de B fornece os mesmos k valores próprios e vectores próprios (Ψ_1, \dots, Ψ_k) , $\Psi_j \in \mathbb{R}^k$. Por Gram-Schmidt podem obter-se os restantes $N - k$ vectores próprios formando uma base de \mathbb{R}^N , os quais, neste contexto, são associados ao valor próprio zero.
- O operador linear S construído a partir do conjunto de sinais típicos é

$$S = \sum_{i=1}^k \alpha_i \Phi_i \Phi_i^t$$

$$S \in \mathcal{M}_{N \times N}.$$

- Para o tomograma considera-se um operador $B(\mu, \nu)$

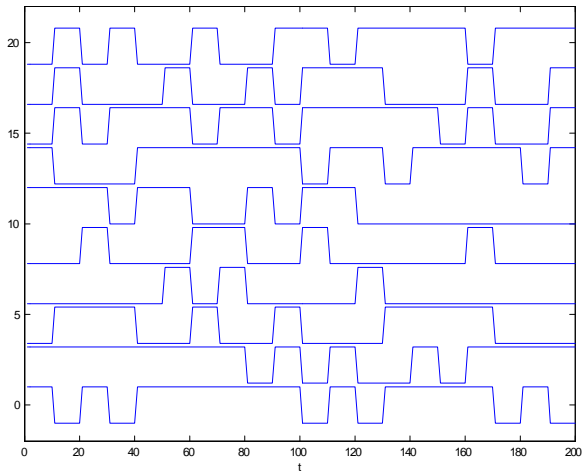
$$B(\mu, \nu) = \mu t + \nu S = \mu \begin{pmatrix} 1\Delta t & & & \\ & 2\Delta t & & \\ & & \ddots & \\ & & & N\Delta t \end{pmatrix} + \nu \sum_{i=1}^k \alpha_i \Phi_i \Phi_i^t$$

$$B \in \mathcal{M}_{N \times N}.$$

- Os vectores próprios de $B(\mu, \nu)$ são as colunas da matriz que diagonaliza $B(\mu, \nu)$. As projecções do sinal nesses vectores próprios são o tomograma adaptado ao par de operadores (t, S) .

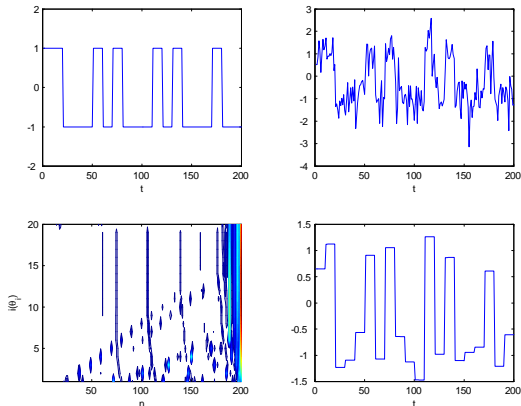
Tomografia com um par adaptado. Um exemplo

Sinais com padrões típicos a detectar: um conjunto de 40 sinais gerados contendo impulsos de duração $\Delta t = 10$ e intensidade $+1$ ou -1 . A duração total de cada sinal é 200 unidades de tempo.



Tomografia com um par adaptado

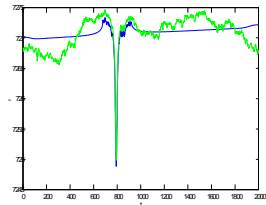
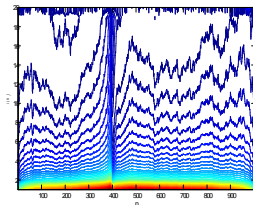
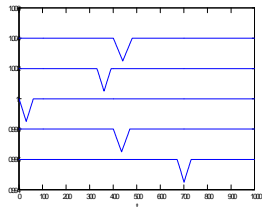
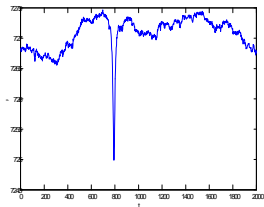
Os vectores próprios de $B(\theta) = t \cos \theta + S \sin \theta$ são usados para projectar o sinal



O gráfico no canto inferior direito corresponde à projeção nos vectores próprios 185 a 200 no nível $\theta_{19} = 19\pi/40$.

Detectando "dust devils"

- Dados experimentais da sonda Phoenix em Marte



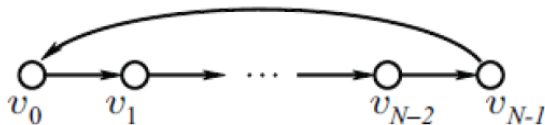
- **Motivação:** muitos sinais que requerem análise não são séries no tempo mas sim sinais definidos num grafo
 - Redes sociais e económicas,*
 - Redes de informação,*
 - A internet e a WWW,*
 - Redes epidemiológicas,*
 - Redes moleculares ou de regulação de genes,*
 - Redes de sensores,*
 - Redes de transporte e eléctricas.*
- **Representação eficiente e análise dos dados** → **Transformadas em grafos**

- Dados: N elementos, com uma estrutura relacional
- Esta informação é representada por um grafo $G = (\mathcal{V}, \mathbf{A})$,
 $\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_{N-1}\}$ é o conjunto dos vértices
 \mathbf{A} é a matriz de adjacência do grafo.
Cada elemento $\mathbf{A}_{n,m}$ de \mathbf{A} é o peso dum lado *dirigido* de v_m para v_n (real ou complexo)
 $\mathcal{N}_n = \{m \mid \mathbf{A}_{n,m} \neq 0\}$ é a *vizinhança* de v_n
- Um *senal num grafo* é uma aplicação do conjunto \mathcal{V} dos vértices no corpo dos complexos \mathbb{C} ,

$$\mathbf{s} = (s_0 \quad s_1 \quad \dots \quad s_{N-1})^T$$

com o elemento s_n indexado pelo vértice v_n

Série no tempo como um grafo



Lados dirigidos e com peso 1

Matrix de adjacência (exemplo $N=5$)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrix Laplaciana : $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$

Duas alternativas para a construção da transformada de Fourier:

projeção no vectores próprios de \mathbf{A} ou \mathbf{L}

Processamento de sinal em grafos

Se a matrix de adjacência não for simétrica podemos usar os vectores próprios de AA^T ou $A^T A$, ou, em alternativa, usar a decomposição de Jordan de \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$$
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{R_{0,0}}(\lambda_0) & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_{R_{M-1,D_{M-1}}}(\lambda_{M-1}) & \\ & & & \end{pmatrix}$$

com os blocos de Jordan associados aos valores próprios de \mathbf{A}

$$J_{r_m,d}(\lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & & \\ & \lambda_m & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Processamento de sinal em grafos

As colunas da matriz V , que reduz \mathbf{A} à sua forma de Jordan, são os vectores próprios

$$(\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{1})\mathbf{v}_{m,d,0} = 0$$

e os vectores próprios generalizados da cadeia de Jordan

$$(\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{1})\mathbf{v}_{m,d,r} = \mathbf{v}_{m,d,r-1}$$

Estes vectores podem ser usados para projectar o sinal \mathbf{s} obtendo-se assim uma transformada— \mathbf{A}

$$\hat{\mathbf{s}} = V^{-1}\mathbf{s}$$

e a inversa

$$\mathbf{s} = V\hat{\mathbf{s}}$$

Um aspecto inconveniente da decomposição de Jordan é o facto que em geral os vectores usados na transformação não são ortogonais.

Tomografia em grafos

Até aqui sinais em grafos foram representados ou como vectores no espaço dos vértices ou como projeções no vectores próprios (ou vectores próprios generalizados) da matriz de adjacência \mathbf{A} . Os vectores no espaço dos vértices podem ser considerados projeções nos vectores próprios dum *operador de vértice*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{N}} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\pi}{N} \times 2} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\frac{2\pi}{N} \times (N-1)} \end{pmatrix}$$

O tomograma para grafos corresponderá à projeção nos vectores próprios de combinações lineares de \mathbf{T} e \mathbf{A} .

Tomografia em grafos

O operador que gera o tomograma será

$$B_\alpha = (1 - \alpha) \mathbf{T} + \alpha \mathbf{A}$$

α entre 0 e 1, ou

Quando se usar a decomposição de Jordan

$$B_\theta = \mathbf{T}^{\cos \theta} + V J_\theta V^{-1} - 1$$

com cada bloco de Jordan de \mathbf{A} substituído por

$$J_{r_m, d}(\lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_m^{\sin \theta} & \sin \theta & & \\ & \lambda_m^{\sin \theta} & \ddots & \\ & & \ddots & \sin \theta \\ & & & \lambda_m^{\sin \theta} \end{pmatrix}$$

Tomografia em grafos

e $T^{\cos \theta}$ é

$$T^{\cos \theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{N} \cos \theta} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\pi}{N} \times 2 \cos \theta} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\frac{2\pi}{N} \times (N-1) \cos \theta} \end{pmatrix}$$

Depois calcula-se a transformação V_θ que reduz B_θ à sua forma de Jordan

$$J'_\theta = V_\theta^{-1} B_\theta V_\theta$$

O tomograma obtém-se por projeção nos vectores próprios (ou vectores próprios generalizados) de J'_θ ,

$$\hat{\mathbf{s}}_\theta = V_\theta^{-1} \mathbf{s}$$

Esta construção que interpola entre \mathbf{A} e o operador de vértice \mathbf{T} é, para os grafos, análoga ao tomograma tempo-frequência. Construções semelhantes podem ser feitas com outras matrizes. Exemplos:

- A matrix de grau \mathbf{D}
- A matrix Laplaciana: $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$
- A matrix do caminho aleatório: $\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}$
- A matrix do caminho aleatório preguiçoso: $\mathbf{W}' = (\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}) / 2$
- A matrix de incidência ∇ : é uma matriz $m \times n$ (m =no. de lados, n =no. de vértices)

$$\nabla_{e,v} = \begin{cases} 1 & \text{se } e = (v, w) & e v < w \\ -1 & \text{se } e = (v, w) & e v > w \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

Uma rede de mercado

Evolução das cotações de 301 companhias do SP500 durante os 250 dias de transação em 2012.

A partir dos retornos diários

$$r(t) = \log S(t) - \log S(t-1)$$

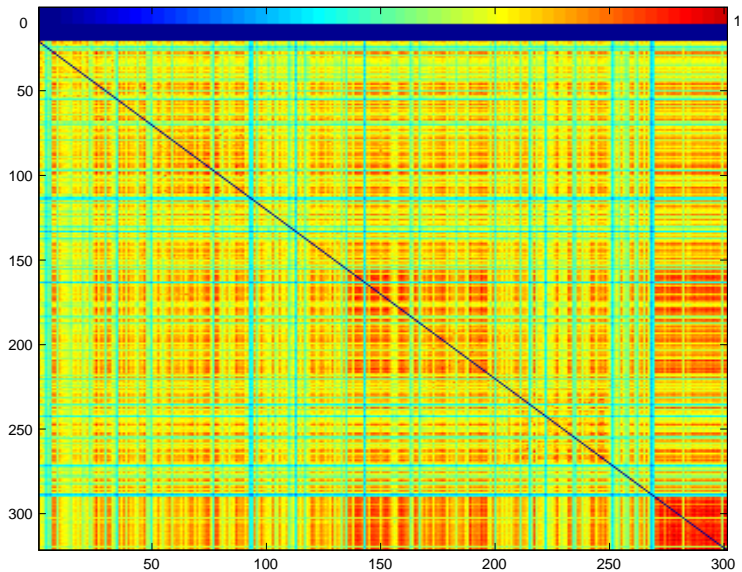
calcula-se uma distância

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{t=1}^{250} (r_i(t) - r_j(t))^2}$$

e uma matriz de adjacência

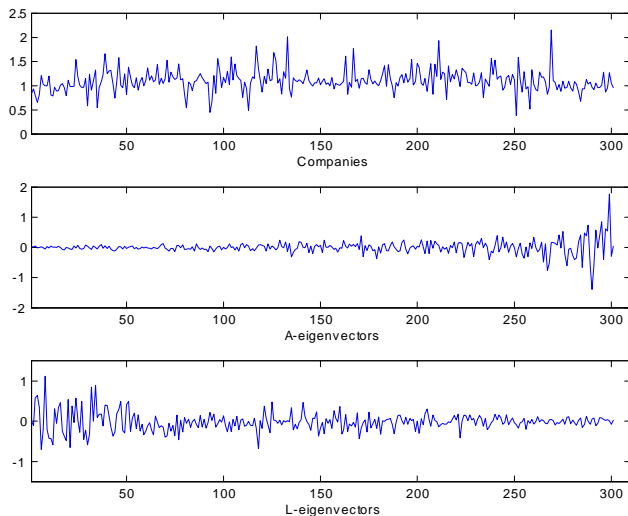
$$\mathbf{A}_{ij}^{(\beta)} = (1 - \delta_{ij}) e^{-\beta(d_{ij} - d_{\min})}$$

A matrix de adjacência

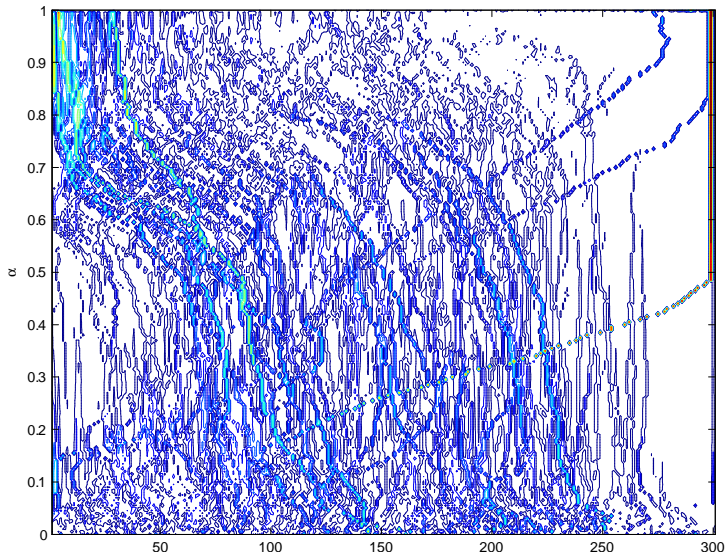


Transformadas A e L do retorno composto

O sinal: o retorno composto $R_i = \prod_{t=1}^{250} (1 + r_i(t))$
e as projeções no espectro de **A** e **L**

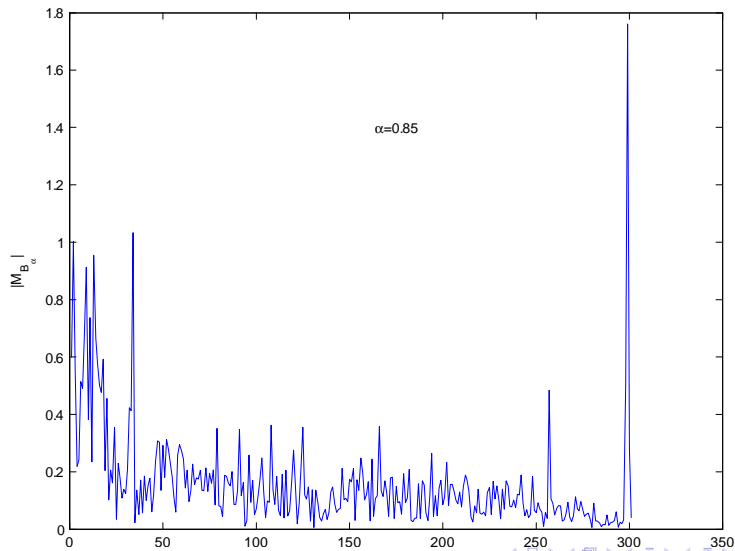


○ tomograma

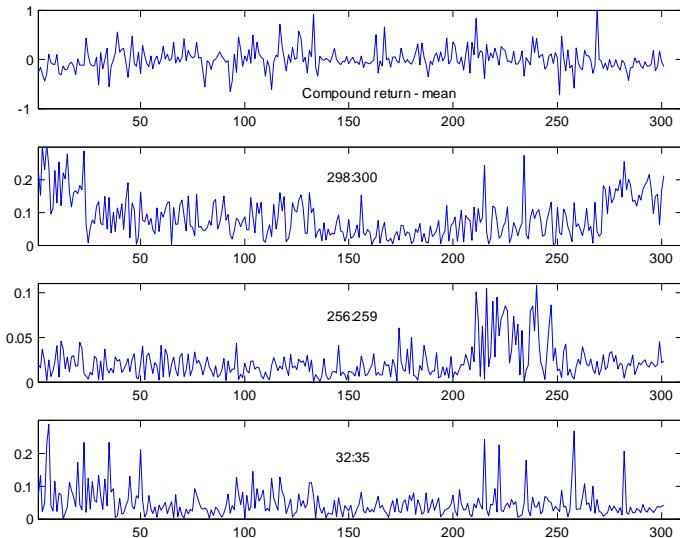


Uma secção do tomograma

$\alpha = 0.85$



Deteção de comunidades dinâmicas no mercado



Theorem

(Shannon) Se uma função $f(t)$ não contiver no seu espectro frequências mais altas que B hertz, ela é completamente determinada pelos seus valores numa série de pontos separados por intervalos de $1/(2B)$ segundos.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin \pi(2Bt - n)}{\pi(2Bt - n)}$$

- **Amostragem regular e irregular:** Amostragem a intervalos irregulares é problemática para funções de banda limitada. Frequência de Nyquist controlada pelo maior intervalo.
- Porém amostragem irregular dum certo tipo pode ser bastante favorável para a reconstrução assintótica de sinais estacionários.
- **Questão:** Será possível reconstruir um sinal com uma taxa de amostragem média inferior à taxa de Nyquist?
- **Resposta:** Sim, mas num espaço funcional diferente.

- **Funções quasi-periódicas (QP)**

Funções que podem ser aproximadas por polinómios trigonométricos

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito

$(\omega_1, B_1, \alpha_1) \cdots (\omega_n, B_n, \alpha_n)$ tal que

$$g(t) = \sum_{j=1}^n B_j e^{i(\omega_j t + \alpha_j)}; \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon$$

Theorem

(Collet) Seja $t_n = n\lambda + X_n$ com X_n uma sequência de i.i.d. variáveis aleatórias uniformemente distribuídas em $[0, \lambda]$. Então, com probabilidade 1, qualquer configuração $\{t_n\}$ do processo pontual tem a propriedade que se F é uma função complexa quasi-periódica satisfazendo

$F(t_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, então $F \equiv 0$.



Considere-se $F(t) = f(t) - g(t)$ em que $g(t)$ é uma função quasi-periódica que coincide com a função desconhecida nos pontos amostrados. Se $f(t)$ for quasi-periódica deve ser igual a $g(t)$. Permite reconstruir assimptoticamente um sinal $f(t)$ por aproximação por polinómios trigonométricos e amostragem aleatória a uma taxa de amostragem média qualquer.

- Ao trabalhar com propriedades de funções no plano $t - \omega$ uma base natural é uma base de chirps
- **O espaço dos chirps lineares** (\mathcal{LC})
Espaço de funções $f(t)$ tais que $\forall \varepsilon > 0 \exists$ número finito de conjuntos de números reais $(\omega_1, c_1, \alpha_1, B_1), \dots, (\omega_k, c_k, \alpha_k, B_k)$ tais que

$$g(t) = \sum_{j=1}^k B_j e^{i\{\omega_j + c_j(t - \alpha_j)\}t} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon$$

$QP \subset \mathcal{LC}$ mas $\mathcal{LC} \not\subset QP$

Theorem

(E. Carlen, RVM) Seja $t_n = n\lambda + X_n$ com X_n uma sequência de i.i.d. variáveis aleatórias uniformemente distribuídas em $[0, \lambda]$. Então, com probabilidade 1, qualquer configuração $\{t_n\}$ do processo pontual tem a propriedade que se F é uma função complexa no espaço \mathcal{LC} satisfazendo $f(t_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, então $f \equiv 0$.

Amostragem aleatória. Um exemplo

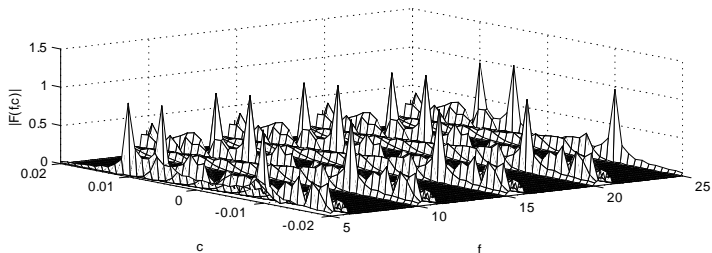
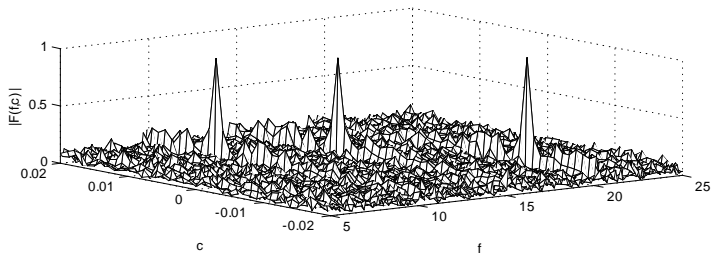
- Seja

$$s(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \exp \{ i (2\pi f_i t + c_i t^2) \}$$

um sinal com três chirps

- Quando a função é reconstruída por amostragem acima da taxa de Nyquist o resultado é idêntico quer a amostragem seja regular ou irregular.
- Porém para taxas abaixo da de Nyquist a diferença é notável. A figura mostra a diferença na reconstrução por amostragem regular e irregular a uma taxa média igual a $\frac{1}{4}$ a de Nyquist.

Amostragem aleatória e regular a 1/4 da taxa de Nyquist



Tomografia não-comutativa

- "*Noncommutative time–frequency tomography*" (V. I. Man'ko and RVM), Phys. Lett. A 263 (1999) 53–59
- "*Tomograms and other transforms: a unified view*" (M. A. Man'ko, V. I. Man'ko and RVM), J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) 8321-8332
- "*A tomographic analysis of reflectometry data I: Component factorization*" (F. Briolle, R. Lima, V. I. Man'ko and RVM), Meas. Sci. Technol. 20 (2009) 105501.
- "*A tomographic analysis of reflectometry data II: The phase derivative*, (F. Briolle, R. Lima and RVM), Meas. Sci. Technol. 20 (2009) 105502.
- "*New signal processing technique for density profile reflectometry on Tore Supra*" (F Clairet, F Briolle, B Ricaud and S Heuraux), Rev. Sci. Instrum. 82 (2011) 083502.

- "*Noncommutative tomography: A tool for data analysis and signal processing*" (F. Briolle, V. I. Man'ko, B. Ricaud and RVM), Journal of Russian Laser Research, 33 (2012) 103-121
- "*Single neuron transient activity detection by means of tomography*" (C. Aguirre, P. Pascual, D. Campos and E.Serrano), BMC Neuroscience 2011, 12(Suppl 1):P297
- "*Signal recognition and adapted filtering by non-commutative tomography*" (C. Aguirre and RVM), IET Signal Processing 8 (2014) 67-75.

Amostragem aleatória

- "*Sampling almost periodic functions with random probes of finite density*" (P. Collet) Proc. Roy. Soc. London A452 (1996) 2263-2277.
- "*Signal reconstruction by random sampling in chirp space*", (E. Carlen and RVM) Nonlinear Dynamics 56 (2009) 223-229.