A Física e a teoria das deformações: Parte I

Relatividade, mecânica quântica e espaço-tempo não-comutativo

R. Vilela Mendes
CMAFcIO, Univ. Lisboa
Academia das Ciências
https://label2.ist.utl.pt/vilela/

Tópicos

- Modelos e estabilidade das teorias físicas (SPTP)
- Teoria das deformações algébricas: Cohomologia e rigidez das algebras de Lie
- O transhumanismo e a matemática
- Quatro noções do senso comum
- Da mecânica não-relativista para a relativista e da clássica para a quântica
- A terceira noção de senso comum
- Estabilização da algebra de Poincaré-Heisenberg: Gravidade e espaço-tempo não-comutativo

A relevância física da teoria das deformações

- Um modelo físico construido com base numa estrutura matemática instável não é um modelo robusto. As constantes do modelo são parametros experimentais, os quais nunca podem conhecidos com total exactidão.
- Numa estrutura matemática instável (uma algebra, por exemplo), uma pequena modificação dos parametros conduz a resultados qualitativamente diferentes.
- A procura de teorias da Natureza através da estabilização de estruturas instáveis é O princípio das teorias físicas estáveis.

- *Deformations, stable theories and fundamental constants*, J. Phys. A. Math. Gen. 27 (1994) 8091-8104.
- *The Stability of Physical Theories Principle*, em "The Algebraic Way. Space, Time and Quantum Beyond Peaceful Coexistence", Imperial College Press 2016."

Algebras e a teoria das deformações

As algebras e os grupos são as estruturas matemáticas mais básicas e também aquelas mais directamente relacionadas com as transformações do espaço-tempo. Exemplos: Rotações, translações, mudanças de coordenadas, etc.

Algebra $(A, +, \times)$ *Grupo* $(G, \bullet, \mathbf{1}, inv)$

Algebra de Lie

$A \times A \rightarrow A \quad \rightarrow \quad X \in A, Y \in A \Longrightarrow \quad [X, Y] \in A$

$[X, Y] = -[Y, X]; \quad [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$

Grupo de Lie

O espaço do grupo é também uma variedade diferenciável

Translação esquerda e mapa diferencial $(g, x \in G)$

$$L_g(x) = gx \qquad (L_g)_x^* : T_x(G) \rightarrow T_{gx}(G)$$

Campos de vectores invariantes à esquerda $(L_g)_x^*(X(x)) = X(gx)$ são uma algebra de Lie

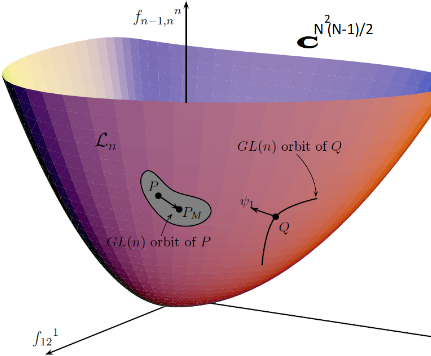
Por outro lado o *mapa exponencial* $Exp(A) = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$ dum elemento da algebra de Lie é um elemento do grupo de Lie

A variedade algébrica das algebras de Lie

Dada uma base $\{X_i; i = 1 \cdots N\}$ em A

$$[X_i, X_j] = i f_{ij}^k X_k \text{ (soma em } k)$$

f_{ij}^k = **constantes de estrutura** com $f_{ij}^k = -f_{ji}^k$ e $f_{ij}^l f_{lk}^s + f_{jk}^l f_{li}^s + f_{ki}^l f_{lj}^s = 0$
Anti-simetria e a **identidade de Jacobi** implicam que as algebras de Lie de dimensão N constituem uma **variedade algébrica** L^N em $\mathbb{C}^{N^2(N-1)/2}$



Duas topologias in L^n

- A topologia induzida em L^n pela topologia de $\mathbb{C}^{N^2(N-1)/2}$
- A topologia de Zariski
  Considere-se a algebra $\mathbb{C}\left[f_{ij}^k\right]$ dos polinómios nas coordenadas $\left\{f_{ij}^k\right\}$ de $\mathbb{C}^{N^2(N-1)/2}$, o ideal I_J gerado pelos polinómios de Jacobi

$$I_J = \left\{f_{ij}^l f_{lk}^s + f_{jk}^l f_{li}^s + f_{ki}^l f_{lj}^s\right\}$$

  e a algebra

$$A\left(L^n\right) = \frac{\mathbb{C}\left[f_{ij}^k\right]}{I_J}$$

  O conjunto $S\left(A\left(L^n\right)\right)$ de ideais maximos de $A\left(L^n\right)$ é isomórfico a L^n

$$S\left(A\left(L^n\right)\right) \sim L^n$$

  Um conjunto fechado $V\left(a\right)$ na topologia de Zariski é o conjunto dos ideais máximos de $A\left(L^n\right)$ que contêm o ideal a

A variedade algébrica das algebras de Lie, deformações e cohomologia

Homologia and cohomologia nasceram para caracterizar classes de equivalência de superfícies e hipersuperfícies através dos seus invariantes, sendo depois aplicadas a outros campos. Homologia trata da composição dos elementos e a cohomologia das funcões sobre esses elementos. A variedade das algebras de Lie sendo uma entidade geométrica é natural que as suas propriedades sejam caracterizadas pela cohomologia. As funções relevantes são as *cocadeias* $C^q(A, A)$, funções $q-$linear antisimétricas na da algebra A com valores em A.

Cohomologia (de Chevalley) duma algebra de Lie

- **p-cocadeia:** *Mapa antisimétrico*
  $\phi_p(X_1, X_2, \cdots, X_p) : A \times A \times \cdots \times A \to A$
  $\phi_p \in C^p(A, A)$
- **Operador cofronteira:**
  $\delta\phi_p(X_1, X_2, \cdots, X_{p+1}) =$
  $\sum_{r=1}^{p+1} (-1)^r \left[X_r, \phi_p\left(X_1, \cdots, \widehat{X_r}, \cdots, X_{p+1}\right)\right] +$
  $\sum_{r<s} (-1)^{r+s-1} \phi_p\left([X_r, X_s], \cdots, \widehat{X_r} \cdots, \widehat{X_s}, \cdots, X_{p+1}\right)$
- $\delta\psi_p$ é uma p+1-cocadeia e $\delta^2 = 0$
- **p-cociclo:** $\delta\phi_p = 0$. Espaço dos p-cociclos $= Z^p$
- **p-cofronteira** $\phi_p = \delta\phi_{p-1}$. Espaço das cofronteiras $= B^p$
  Porque $\delta^2 = 0$, uma cofronteira é necessáriamente um cociclo.
- **Grupos de cohomologia:** $H^p = Z^p / B^p$.

Algebras equivalentes

Uma transformação linear de coordenadas não altera a algebra. Gera uma **órbita** de GL(N,R) em L^N (uma órbita de algebras isomórficas)

$$X_i' = M_{ij} X_j \qquad f_{ijk}^{'} = M_{ia} M_{jb} \left(M^{-1}\right)_{ck} f_{abc}$$

Para $M_t = \mathbf{1} + tQ$ o novo produto na algebra isomórfica é:

$$M_t^{-1} \left[M_t X, M_t Y\right]_0 = [X, Y]_0 + t\left([X, QY]_0 - [Y, QX]_0 - Q\left[X, Y\right]_0\right) + \cdots$$

A deformação para uma algebra isomórfica é uma **2-cofronteira**.

Por outro lado numa deformação arbitrária

$$[X, Y]_t = [X, Y]_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m (X, Y) t^m$$

a antisimetria e a identidade de jacobi implicam $\psi_m (X, Y) = -\psi_m (Y, X)$ $[X, \psi_1 (Y, Z)] + [Y, \psi_1 (Z, X)] + [Z, \psi_1 (X, Y)] - \psi_1 ([X, Y], Z) - \psi_1 ([Z, X], Y) - \psi_1 ([Y, Z], X) = 0 \Longrightarrow \psi_1 (X, Y)$ é um **2-cociclo**.

Portanto a estabilidade (rigidez) duma algebra de Lie está associada às propriedades da sua cohomologoia de Chevalley.

Teorema: Se $H^2 (A) = 0$ a algebra é rígida.

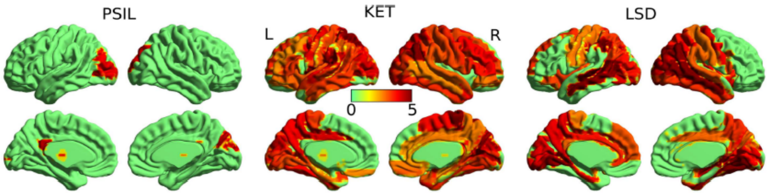
É uma condição suficiente.

Teorema: Seja $H^2 (A) \neq 0$. Se $H^3 (A) = 0$ a deformação é integrável.

Transhumanismo

O *transhumanismo* é um movimento que pretende expandir as capacidades físicas e intelectuais dos humanos.
Há duas vias principais no que respeita à expansão das capacidades intelectuais:
Primeira via: Expansão do cérebro por conversão da glia em neurónios ou integração de electrónica no cérebro.
- *Turning Reactive Glia into Functional Neurons in the Brain*, J. Lu et al., Cell Stem Cell. 14 (2014) 133–134.
- *Direct Reprogramming of Resident NG2 Glia into Neurons with Properties of Fast-Spiking Parvalbumin-Containing Interneurons*, Stem Cell Reports 9 (2017) 742–751.
- *A multidisciplinary approach to study the functional properties of neuron-like cell models constituting a living bio-hybrid system*, S. Caponi et al., AIP Advances 6 (2016) 111303.
Tem interesse para a correção de acidentes cerebrais, porém não é claro que o aumento do tamanho do cérebro altere qualitativamente as suas capacidades.

Segunda via: Expansão da consciêcia pelo uso de drogas psicodélicas.



Increased spontaneous MEG signal diversity for psychoactive doses of ketamine, LSD and psilocybin, M. Schartner et al., nature/scientificreports/7:46421.

Os efeitos principais localizão-se principalmente nas regiões associadas à percepção, não às capacidades linguísticas ou motoras. Foi sugerido como tratamento da depressão. Porém é apenas um aumento quantitativo da máquina de processamento da informação que nos chega através dos sentidos. *Mais do mesmo!*

A percepção sensorial e a visão do mundo

Contudo, uma droga bem mais poderosa é a matemática, que nos permite ir para além da percepção sensorial. E ainda não está proibida!

Algumas noções do senso comum sobre o mundo físico, as quais de acordo com a percepção sensorial, parecem corretas:

1. O fluir do tempo não depende da velocidade. Isto é, *o relógio no comboio que vai a passar move-se ao mesmo ritmo do relógio na parede da estação.*

A percepção sensorial e a visão do mundo

Contudo, uma droga bem mais poderosa é a matemática, que nos permite ir para além da percepção sensorial. E ainda não está proibida!

Algumas noções do senso comum sobre o mundo físico, as quais de acordo com a percepção sensorial, parecem corretas:

1. O fluir do tempo não depende da velocidade. Isto é, *o relógio no comboio que vai a passar move-se ao mesmo ritmo do relógio na parede da estação.*
2. Todas as quantidades observáveis são compatíveis. Isto é, *faz sentido dizer que um carro passou um sinal vermelho (posição x) exactamente à velocidade v.*

A percepção sensorial e a visão do mundo

Contudo, uma droga bem mais poderosa é a matemática, que nos permite ir para além da percepção sensorial. E ainda não está proibida!

Algumas noções do senso comum sobre o mundo físico, as quais de acordo com a percepção sensorial, parecem corretas:

1. O fluir do tempo não depende da velocidade. Isto é, *o relógio no comboio que vai a passar move-se ao mesmo ritmo do relógio na parede da estação.*
2. Todas as quantidades observáveis são compatíveis. Isto é, *faz sentido dizer que um carro passou um sinal vermelho (posição x) exactamente à velocidade v.*
3. As noções de tempo e espaço são compatíveis. Isto é, *faz sentido dizer que estou aqui (posição exactamente x) agora (exactamente no tempo t).*

A percepção sensorial e a visão do mundo

Contudo, uma droga bem mais poderosa é a matemática, que nos permite ir para além da percepção sensorial. E ainda não está proibida!

Algumas noções do senso comum sobre o mundo físico, as quais de acordo com a percepção sensorial, parecem corretas:

1. O fluir do tempo não depende da velocidade. Isto é, *o relógio no comboio que vai a passar move-se ao mesmo ritmo do relógio na parede da estação.*
2. Todas as quantidades observáveis são compatíveis. Isto é, *faz sentido dizer que um carro passou um sinal vermelho (posição x) exactamente à velocidade v.*
3. As noções de tempo e espaço são compatíveis. Isto é, *faz sentido dizer que estou aqui (posição exactamente x) agora (exactamente no tempo t).*
4. Os números reais são suficientes para parametrizar o espaço e o tempo.

A percepção sensorial e a visão do mundo

Contudo, uma droga bem mais poderosa é a matemática, que nos permite ir para além da percepção sensorial. E ainda não está proibida!

Algumas noções do senso comum sobre o mundo físico, as quais de acordo com a percepção sensorial, parecem corretas:

1. O fluir do tempo não depende da velocidade. Isto é, *o relógio no comboio que vai a passar move-se ao mesmo ritmo do relógio na parede da estação.*
2. Todas as quantidades observáveis são compatíveis. Isto é, *faz sentido dizer que um carro passou um sinal vermelho (posição x) exactamente à velocidade v.*
3. As noções de tempo e espaço são compatíveis. Isto é, *faz sentido dizer que estou aqui (posição exactamente x) agora (exactamente no tempo t).*
4. Os números reais são suficientes para parametrizar o espaço e o tempo.
5. *É minha intenção no decorrer destas palestras demolir estas noções "óbvias" do senso comum.*

A percepção sensorial e a visão do mundo

- Sabemos hoje que a noção 1 (independência do tempo e da velocidade) e a noção 2 (compatibilidade de todas as quantidades observáveis) não estão corretas. Se 1. estivesse certa nenhum GPS funcionaria. Se 2. estivesse correta practicamente toda a moderna tecnologia não funcionaria.

A percepção sensorial e a visão do mundo

- Sabemos hoje que a noção 1 (independência do tempo e da velocidade) e a noção 2 (compatibilidade de todas as quantidades observáveis) não estão corretas. Se 1. estivesse certa nenhum GPS funcionaria. Se 2. estivesse correta practicamente toda a moderna tecnologia não funcionaria.
- A noção 3. (compatibilidade do tempo e do espaço) e a 4. (os números reais serem uma parametrização completa do espaço-tempo), são questões para o futuro.

A percepção sensorial e a visão do mundo

- Sabemos hoje que a noção 1 (independência do tempo e da velocidade) e a noção 2 (compatibilidade de todas as quantidades observáveis) não estão corretas. Se 1. estivesse certa nenhum GPS funcionaria. Se 2. estivesse correta practicamente toda a moderna tecnologia não funcionaria.
- A noção 3. (compatibilidade do tempo e do espaço) e a 4. (os números reais serem uma parametrização completa do espaço-tempo), são questões para o futuro.
- *De facto o que a matemática nos diz é que o que seria estranho é que as noções 1. e 2. fossem corretas. A matemática contradiz a percepção sensorial e como tal funciona como um amplificador da nossa percepção do mundo.*

Da dinâmica não relativista para a relativista

Classicamente, a mudança de coordenadas entre dois referenciais em movimento com velocidade relativa constante v é

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}$$

Transformações de Galileu.
A algebra de Galileu, associada as estas transformções é

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= 0 \end{aligned}$$

em que J_i e K_i são os geradores de rotações e as transformações de velocidade. Esta algebra é instável e tem um 2-cociclo não-trivial (que não é uma 2-cofronteira)

$$\psi\left(K_i, K_j\right) = i\epsilon_{ijk} J_k$$

Da dinâmica não relativista para a relativista

A algebra de Galileu é estabilizada por uma deformação que a converte na algebra de Lorentz, a qual sendo semisimples é estável

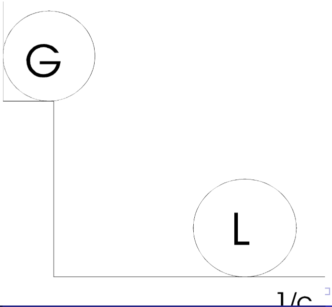
$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \\
[J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \\
[K_i, K_j] &= -i\frac{1}{c^2}\epsilon_{ijk} J_k
\end{aligned}
$$

A esta algebra correspondem as **transformações de Lorentz**:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\
t' &= -\frac{v}{c^2}\frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

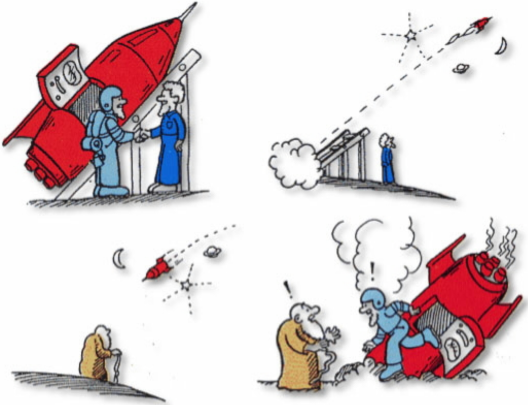
Da dinâmica não relativista para a relativista

A mecânica não-relativista é um ponto isolado $\left(\frac{1}{c}=0\right)$. Deste modo a nossa percepção sensorial é algo patológica em relação à ordem natural das coisas. Uma Natureza em que $\frac{1}{c}$ fosse exactamente zero era altamente improvável. A matemática, ao mostrar a natureza pouco natural da nossa percepção actua como um *amplificador dos sentidos*. Há inúmeras consequências agora consideradas simples: o GPS, os μ*s* cósmicos chegarem à Terra, etc. A física Galilean $\left(\frac{1}{c}=0\right)$ vive à beira do precipício. Logo que $\frac{1}{c}$ deixa de ser zero, a física torna-se completamente diferente



Da dinâmica não relativista para a relativista

O tempo e o espaço estão ligados entre si e o tempo é uma função da velocidade do referencial. Isto é o que a matemática nos diz que é natural. As consequências não são paradoxos. O que seria paradoxal seria a não existência dos paradoxos.



Da mecânica clássica para a quântica

- O espaço de fase da mecânica clássica é uma variedade simplética $W = (T^*M, \omega)$ em que T^*M é o fibrado cotangente sobre o espaço de configuração M e ω é uma forma simplética. Em coordenadas locais (Darboux) (p_i, q_i)

$$d\ \omega = \sum dp_i \wedge dq_i$$

O parêntesis de Poisson induz uma estrutura de algebra de Lie sobre as funções C^∞ em W,

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}_i}$$

- Seja $T^*M = \mathbf{R}^{2n}$. Então,

$$\omega = \sum_{1 \leq \mathbf{i},\mathbf{j} \leq \mathbf{n}} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = \sum_{1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}} dx^i \wedge dx^{i+n}$$

Da mecânica clássica para a quântica

- Considere-se o seguinte operador bidiferencial

$$P^r(f,g) = \sum_{\substack{i_1\cdots i_r \\ j_1\cdots j_r}} \omega^{i_1 j_1}\cdots\omega^{i_r j_r}\ \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_r}(f)\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_r}(g)$$

  $P^1(f,g)$ é parêntesis de Poisson. $P^3(f,g)$ é um $2-$cociclo não-trivial, que implica a instabilidade da algebra de Poisson e a existência de deformações (a menos obstruções em H^3).

- Deformações estabilizantes foram obtidas em condições muito gerais e, em particular, se W é finita e plana, elas são todas equivalentes ao parêntesis de Moyal

$$[f,g]_M = \frac{2}{\hbar} sin(\frac{\hbar}{2}P)(f,g) = \{f,g\} - \frac{\hbar^2}{4.3!}P^{\mathbf{3}}(f,g) + \cdots$$

  Pode-se também definir $[f,g]_M = \frac{1}{i\hbar}(f *_\hbar g - g *_\hbar f)$ sendo $f *_\hbar g$ um $*-$produto associativo

$$f *_\hbar g = \exp\left(i\frac{\hbar}{2}P(f,g)\right)$$

Da mecânica clássica para a quântica

- A algebra de Moyal é equivalente à mecânica quântica no espaço de Hilbert através da correspondência de Weyl.
- Seja $f(p,q)$ uma função no espaço de fase e $\widetilde{f}$ a sua transformada de Fourier. Então à função f associamos o seguinte operador no espaço de Hilbert

$$\boldsymbol{\Omega}(f) = \int \widetilde{f}(x_i, y_i) e^{-\frac{i}{\hbar}\sum x_i Q_i + y_i P_i} \, dx_i dy_i$$

sendo $Q_i \boldsymbol{\psi} = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\psi}$ e $P_i = -i\boldsymbol{\hbar} \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{\psi}$. Então

$$[\boldsymbol{\Omega}(f), \boldsymbol{\Omega}(g)] = -i\boldsymbol{\hbar}\boldsymbol{\Omega}\left([f,g]_M\right)$$

em que o lado esquerdo é o comutador usual do espaço de Hilbert e o lado direito parêntesis de Moyal.

- O mundo quântico, que corresponde à estabilização da algebra de Poisson instável, pode ser descrito ou pelos operadores do espaço de Hilbert ou por uma algebra deformada no espaço de fase.

Da mecânica clássica para a quântica

Outra maneira de olhar para a instabilidade da mecânica clássica é examinar a algebra das posições e dos momentos (ou das velocidades) As observáveis que caracterizam o movimento dos corpos são a posição $\overrightarrow{x}$ e o momento $\overrightarrow{p} = \frac{m_0 \overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{v}}{c}\right)^2}}$. No caso clássico

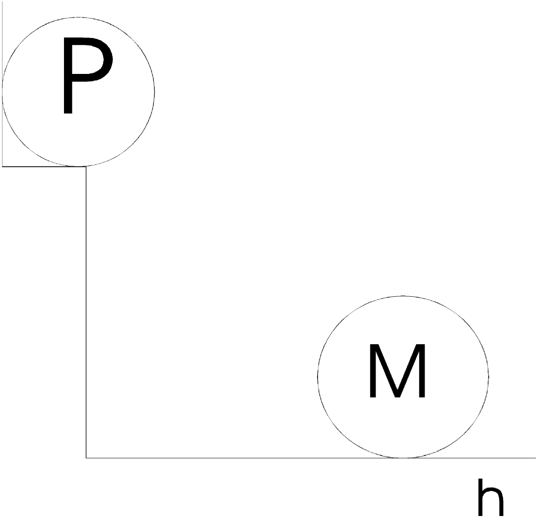
$$[\overrightarrow{p}, \overrightarrow{x}] = 0$$

isto é, posições e momentos são observáveis compatíveis. Passa-se para a teoria quântica modificando este comutador

$$[p_i, x_j] = i\delta_{ij}\hbar$$

em que $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h sendo a constante de Planck constant. A estrutura da teoria é qualitativamente a mesma para qualquer valor não nulo de $\hbar$. Em conclusão: a teoria clássica é um ponto isolado $\hbar = 0$ (instável para qualquer pequena deformação).

A instabilidade da mecânica clássica



A algebra de Poincaré-Heisenberg (que contém a relatividade e a mecânica quântica**)**

$$
\begin{array}{lcl}
\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] & = & i\left(M^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + M^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - M^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho} - M^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\right) \\
\left[M^{\mu\nu}, p^{\lambda}\right] & = & i\left(p^{\mu}\eta^{\nu\lambda} - p^{\nu}\eta^{\mu\lambda}\right) \\
\left[M^{\mu\nu}, x^{\lambda}\right] & = & i\left(x^{\mu}\eta^{\nu\lambda} - x^{\nu}\eta^{\mu\lambda}\right) \\
\left[p^{\mu}, x^{\nu}\right] & = & i\eta^{\mu\nu}1 \\
\left[x^{\mu}, x^{\nu}\right] & = & 0 \\
\left[p^{\mu}, p^{\nu}\right] & = & 0
\end{array}
$$

não é estável.

Estabilizando a algebra de Poincaré-Heisenberg

O grupo $H^2 = Z^2 / B^2$ (2-cohomologia) tem três geradores não-triviais

$$
\begin{aligned}
\left[p^\mu, x^\nu\right] &= i\eta^{\mu\nu}\Im + i\beta_3 M^{\mu\nu} \\
\left[x^\mu, x^\nu\right] &= i\beta_2 M^{\mu\nu} \\
\left[p^\mu, p^\nu\right] &= i\beta_1 M^{\mu\nu} \\
\left[x^\mu, \Im\right] &= -i\beta_2 p^\mu + i\beta_3 x^\mu \\
\left[p^\mu, \Im\right] &= i\beta_1 x^\mu - i\beta_3 p^\mu \\
\left[M^{\mu\nu}, \Im\right] &= 0
\end{aligned}
$$

Cone de instabilidade para $\beta_3^2 = \beta_1\beta_2$, mas para $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ genéricos todas as algebras são rígidas (estáveis) e isomórficas a $SO(1,5)$ou $SO(2,4)$ ou $SO(3,3)$ (dependendo dos sinais de β_1 e β_2). Por mudança de coordenadas linar pode-se reduzir a dois casos:

$$
\begin{aligned}
\beta_3 &= 0, \beta_1, \beta_2 \neq 0 \\
\beta_3 &\neq 0, \beta_1 = \beta_2 = 0
\end{aligned}
$$

O segundo caso implica $\left[x^\mu, x^\nu\right] = \left[p^\mu, p^\nu\right] = 0$ que não parece ser físicamente relevante, porque pelo menos o segundo comutador deverá ser

Estabilizando a algebra de Poincaré-Heisenberg: Gravidade e espaço-tempo não-comutativo

No primeiro caso ($\beta_3 = 0$), interpretando x^μ e p^ν como as coordenadas e momentos físicos obtemos:

$$
\begin{aligned}
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(M^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + M^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - M^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho} - M^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}) \\
[M^{\mu\nu}, p^{\lambda}] &= i(p^\mu\eta^{\nu\lambda} - p^\nu\eta^{\mu\lambda}) \\
[M^{\mu\nu}, x^{\lambda}] &= i(x^\mu\eta^{\nu\lambda} - x^\nu\eta^{\mu\lambda}) \\
[p^\mu, x^\nu] &= i\eta^{\mu\nu}\boxed{\Im} \\
[x^\mu, x^\nu] &= \boxed{-i\epsilon\ell^2 M^{\mu\nu}} \\
[p^\mu, p^\nu] &= \boxed{-i\epsilon'\phi^2 M^{\mu\nu}} \\
[x^\mu, \Im] &= \boxed{i\epsilon\ell^2 p^\mu} \\
[p^\mu, \Im] &= \boxed{-i\epsilon'\phi^2 x^\mu} \\
[M^{\mu\nu}, \Im] &= 0
\end{aligned}
$$

Estabilizando a algebra de Poincaré-Heisenberg: Gravidade e espaço-tempo não-comutativo

Algumas consequências a confirmar experimentalmente:

- Tempo ou espaço quantizado (dependendo dos sinais de ϵ,ϵ'),
- Desvios de c para trens de onda luminosos,
- Uma algebra exterior de maior dimensão,
- Geometria não-comutativa no espaço-tempo,
- Correções a QED: Momento magnético anómalo, etc.

References

Deformations, stable theories and fundamental constants, J. Phys. A. Math. Gen. 27 (1994) 8091-8104.

C. Chryssomalakos and E. Okon; *Generalized quantum relativistic kinematics: A stability point of view*, Int. J. Mod. Phys. D 13 (2004) 2003-2034.

The Stability of Physical Theories Principle, in "The Algebraic Way. Space, Time and Quantum Beyond Peaceful Coexistence" I. Licata (Ed.), Imperial College Press 2

Geometry, stochastic calculus and quantum fields in a non-commutative space-time, J. Math. Phys. 41 (2000) 156-186.

The geometry of noncommutative spacetime, Int. J. Theor. Physics 56 (2017) 259-269

Non-commutative space-time and the uncertainty principle, Phys. Lett. A 290 (2001) 109-114

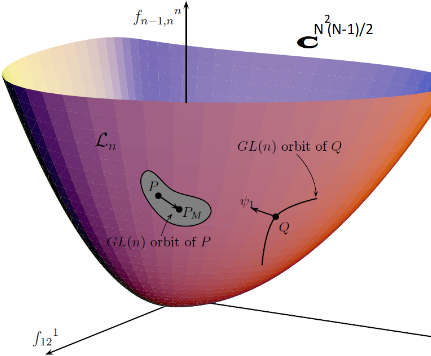
References

- *Some consequences of a non-commutative space-time structure*, Eur. Phys. J. C 42 (2005) 445–452
- *The deformation-stability fundamental length and deviations from c*, Phys. Lett. A 376 (2012) 1823-1826.
- *A laboratory scale fundamental time?*, Eur. Phys. J. C (2012) 72:2239
- *An extended Dirac equation in noncommutative space-time*, Mod. Phys. Lett. A 31 (2016) 1650089
- *Commutative or noncommutative spacetime? Two length scales of noncommutativity*, Phys. Rev. D99 (2019) 123006.
- *Non-commutative spacetime and the anomalous magnetic moment* (2022) doi: 10.13140/rg.2.2.22020.19848

Dada uma base $\{X_i; i = 1 \cdots N\}$ na algebra A

$$[X_i, X_j] = i f_{ij}^k X_k \text{ (soma em } k)$$

$f_{ij}^k =$ **constantes de estrutura** com $f_{ij}^k = -f_{ji}^k$ e $f_{ij}^l f_{lk}^s + f_{jk}^l f_{li}^s + f_{ki}^l f_{lj}^s = 0$ **Anti-simetria** e a **identidade de Jacobi** implicam que as algebras de Lie de dimensão N cponstituem uma **variedade algébrica** L^N em $\mathbb{C}^{N^2(N-1)/2}$



Duas topologias in L^N

- A topologia induzida em L^N pela topologia de $\mathbb{C}^{N^2(N-1)/2}$
- A topologia de Zariski

  Considere-se a algebra $\mathbb{C}\left[f_{ij}^k\right]$ dos polinómios nas coordenadas $\left\{f_{ij}^k\right\}$ de $\mathbb{C}^{N^2(N-1)/2}$, o ideal I_J gerado pelos polinómios de Jacobi

  $$I_J = \left\{f_{ij}^l f_{lk}^s + f_{jk}^l f_{li}^s + f_{ki}^l f_{lj}^s\right\}$$

  e a algebra

  $$A\left(L^N\right) = \frac{\mathbb{C}\left[f_{ij}^k\right]}{I_J}$$

  O conjunto $S\left(A\left(L^N\right)\right)$ de ideais maximos de $A\left(L^N\right)$ é isomórfico a L^N

  $$S\left(A\left(L^n\right)\right) \sim L^n$$

  Um conjunto fechado $V\left(a\right)$ na topologia de Zariski é o conjunto dos ideais máximos de $A\left(L^N\right)$ que contêm o ideal a

A variedade algébrica das algebras de Lie, deformações e cohomologia

Homologia and cohomologia nasceram para caracterizar classes de equivalência de superfícies e hipersuperfícies através dos seus invariantes, sendo depois aplicadas a outros campos. Homologia trata da composição dos elementos e a cohomologia das funcões sobre esses elementos. A variedade das algebras de Lie sendo uma entidade geométrica é natural que as suas propriedades sejam caracterizadas pela cohomologia. As funções relevantes são as *cocadeias* $C^q(A, A)$, funções $q-$linear antisimétricas na algebra A com valores em A.

Cohomologia (de Chevalley) duma algebra de Lie

- **p-cocadeia:** *Mapa antisimétrico*
  $\phi_p\left(X_1, X_2, \cdots, X_p\right) : A \times A \times \cdots \times A \rightarrow A$
  $\phi_p \in C^p\left(A, A\right)$
- **Operador cofronteira:**
  $\delta\phi_p\left(X_1, X_2, \cdots, X_{p+1}\right) =$
  $\sum_{r=1}^{p+1}\left(-1\right)^r\left[X_r, \phi_p\left(X_1, \cdots, \widehat{X_r}, \cdots, X_{p+1}\right)\right] +$
  $\sum_{r<s}\left(-1\right)^{r+s-1}\phi_p\left(\left[X_r, X_s\right], \cdots, \widehat{X_r} \cdots, \widehat{X_s}, \cdots, X_{p+1}\right)$
- $\delta\psi_p$ é uma p+1-cocadeia e $\delta^2 = 0$
- **p-cociclo:** $\delta\phi_p = 0$. Espaço dos p-cociclos $= Z^p$
- **p-cofronteira** $\phi_p = \delta\phi_{p-1}$. Espaço das cofronteiras $= B^p$
  Porque $\delta^2 = 0$, uma cofronteira é necessáriamente um cociclo.
- **Grupos de cohomologia:** $H^p = Z^p / B^p$.

Equivalent algebras

Uma mudança linear de coordinadas em A não altera a albebra. Gera uma **órbita** de GL(N,R) em L^N (uma orbita de algebras isomorficas)

$$X_i' = M_{ij} X_j \qquad f_{ijk}^{'} = M_{ia} M_{jb} \left(M^{-1} \right)_{ck} f_{abc}$$

For $M_t = \mathbf{1} + tQ$ the new product in the isomorphic algebra is

$$M_t^{-1} \left[M_t X, M_t Y \right]_0 = \left[X, Y \right]_0 + t \left(\left[X, QY \right]_0 - \left[Y, QX \right]_0 - Q \left[X, Y \right]_0 \right) + \cdots$$

The deformation to an isomorphic algebra is a **2-coboundary**.

O complexo cohomológico

É conveniente definir um $\circ -$ *produto* de cocadeias
$\phi \in C^p(A,A), \psi \in C^q(A,A), \phi \circ \psi \in C^{p+q-1}(A,A)$

$$\phi \circ \psi \left(X_1, \cdots, X_{p+q-1}\right) = \sum sign\left(\sigma\right) \phi\left(\psi\left(X_{i_1}, \cdots, X_{i_q}\right), X_{j_1}, \cdots, X_{j_{p-1}}\right)$$

σ é o indice da permutação. If $\mu \in C^2(A,A)$ for o comutador de Lie

$$\mu \circ \mu\left(X, Y, Z\right) = \left[\left[X, Y\right], Z\right] + \left[\left[Y, Z\right], X\right] + \left[\left[Z, X\right], Y\right]$$

e a identidade de Jacobi identity é simplesmemte $\mu \circ \mu = 0$
E um *parêntesis*

$$\{\phi, \psi\} = \phi \circ \psi - (-1)^{(p-1)(q-1)} \psi \circ \phi$$

Com estas opearções o complexo $C^{\bullet}(A,A)$ torna-se uma Lie superalgebra satisfazendo a identidade de Jacobi generalizada

$$(-1)^{pq} \{\{\phi, \psi\}, \chi\} + (-1)^{qr} \{\{\psi, \chi\}, \phi\} + (-1)^{rp} \{\{\chi, \phi\}, \psi\} = 0$$

com $\phi \in C^p(A,A), \psi \in C^q(A,A), \chi \in C^r(A,A)$

Dada uma lei μ de algebra de Lie, uma deformação formal é

$$\mu_t = \mu + \sum t^n \phi_n$$

com $\phi_n \in C^2(A, A)$. Para que μ_t seja a lei de uma algebra de Lie deve satisfazer a identidade de Jacobi $(\mu_t \circ \mu_t = 0)$ em todas as ordens, isto é:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \circ \mu = 0 \\ \delta\phi_1 = 0 \\ \phi_1 \circ \phi_1 = -\delta\phi_2 \\ \phi_1 \circ \phi_2 + \phi_2 \circ \phi_1 = -\delta\phi_3 \\ \vdots \\ \phi_p \circ \phi_p + \sum_{1 \le i \le p-1} \phi_i \circ \phi_{2p-i} + \phi_{2p-i} \circ \phi_i = -\delta\phi_{2p} \\ \sum_{1 \le i \le p} \phi_i \circ \phi_{2p+1-i} + \phi_{2p+1-i} \circ \phi_i = -\delta\phi_{2p+1} \end{array} \right.$$

Lembremos, que para $\phi \in C^2(A, A)$

$$\delta\phi(X, Y, Z) = \phi([X, Y], Z) + \phi([Y, Z], X) + \phi([Z, X], Y) - [X, \phi(Y, Z)$$

Teorema: Se $H^2(A) = 0$ a algebra é rígida.

Appendix 2: Velocity of wave packets in non-commutative spacetime

- Space and time, noncommutative coordinates, cannot be simultaneously diagonalized. Speed defined by expectation values,

$$v_{\psi}^{i}=\frac{1}{\langle\psi_t,\psi_t\rangle}\frac{d}{dt}\langle\psi_t,x^i\psi_t\rangle$$

ψ_t a state with small dispersion of momentum around central value p

$$\psi_0=\int\left|k^0\overrightarrow{k}\,\alpha\right\rangle f_p(k)\,d^3k$$

$k^0=\sqrt{\left|\overrightarrow{k}\right|^2+m^2}$, $f_p(k)$ is a normalized function peaked at $k=p$.

- To obtain ψ_t apply to ψ_0 the time-shift operator. This is not e^{-iap^0}

$$e^{-iap^0}te^{iap^0}=t+a\Im$$

follows from $\left[p^0,t\right]=i\Im$ whereas a time-shift generator Υ should satisfy $[\Upsilon,t]=i\mathbf{1}$

Velocity of wave packets in non-commutative spacetime

- The time shift operator Υ, to all ℓ^2 orders,
  $\Upsilon = \frac{\overline{p}^0}{\overline{\Im}} \sum_{k=0} (-\epsilon)^k \frac{\ell^{2k}}{2k+1} \left(\frac{\overline{p}^0}{\overline{\Im}}\right)^{2k}$
- Computing the time derivative of the expectation value of x^i on the time-shifted state one obtains the wave packet velocity

$$v_\psi = \frac{\overline{p}}{\overline{p}^0} \frac{1 - \epsilon\ell^2 \left(\frac{\overline{p}^0}{\overline{\Im}}\right)^2}{1 + \epsilon\ell^2 \left(\frac{\overline{p}^0}{\overline{\Im}}\right)^2}$$

  Correction negative or positive depending on the sign ϵ. Massless particles wave packets travel slower or faster than c according to whether $\epsilon = +1$ (quantized time) or $\epsilon = -1$ (quantized space).
- No violation of relativity. Both Lorentz and the Poincaré groups are still exact symmetries, the velocity corrections do not arise from modifications of the dispersion relation, which still is $\left(\overline{p}^0\right)^2 = \left(\overrightarrow{\overline{p}}\right)^2 + m^2$,but from the noncommutativity of time and space.

Appendix 3: Differential algebra and extended Dirac equation

- In the non-commutative geometry implied by the deformed algebra, the differential algebra may be constructed either by duality from the derivations or from the triple $(H, \pi(U_{\Re}), D)$, where $U_{\Re}$ is the enveloping algebra to which a unit, the inverse of $\Im$, is added.

$$U_{\Re} = \{x_\mu, M_{\mu\nu}, p_\mu, \Im, \Im^{-1}, 1\}$$

  - $\pi(U_{\Re})$ is a representation of the $U_{\Re}$ algebra in the Hilbert space H
  - D is the Dirac operator, the commutator with the Dirac operator used to generate the one-forms.
- However when the algebra has enough derivations the correspondence of the notions to the classical ones becomes very clear. Considers here the set V of derivations with basis $\{\partial_\mu, \partial_4\}$

$$\begin{array}{rcl} \partial_\mu(x_\nu) & = & \eta_{\mu\nu}\Im \\ \partial_4(x_\mu) & = & -\epsilon_5 \ell p_\mu \Im \\ \partial_\sigma(M_{\mu\nu}) & = & \eta_{\sigma\mu}p_\nu - \eta_{\sigma\nu}p_\mu \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \partial_\mu(p_\nu) = \partial_\mu(\Im) = \partial_\mu(1) = \partial_4(1) = 0 \\ \partial_4(M_{\mu\nu}) = \partial_4(p_\mu) = \partial_4(\Im) = 0 \end{array}$$

Differential algebra and extended Dirac equation

- $\{\partial_\mu, \partial_4\}$ is the minimal set that contains the usual ∂_μ's, is maximal abelian and is ction closed on the coordinate operators
- The operators associated to the physical coordinates are just the four x_μ, $\mu \in (0, 1, 2, 3)$. However, an additional degree of freedom appears in the set of derivations. No extra dimension appears in the set of physical coordinates. However the derivations in V introduce, by duality, an additional degree of freedom in the exterior algebra.
- For example, quantum fields that are Lie algebra-valued connections pick up additional components.
- The Dirac operator is

$$D = i\gamma^a \partial_a$$

with $\partial_a = (\partial_\mu, \partial_4)$, the γ's being a basis for the Clifford algebras $C(3,2)$ or $C(4,1)$

$$\begin{array}{ll} \left(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4 = \gamma^5\right) & \epsilon_5 = +1 \\ \left(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4 = i\gamma^5\right) & \epsilon_5 = -1 \end{array}$$

- **Spinor fields**:. From

$$\left[p_\mu, e^{-\frac{i}{2}k_\nu\left\{x^\nu,\Im^{-1}\right\}_+}\right] = k_\mu e^{-\frac{i}{2}k_\nu\left\{x^\nu,\Im^{-1}\right\}_+}$$

  a spinor field is written

$$\Psi = \int d^4k\delta(k^2-m^2)\left\{b_k u_k e^{-\frac{i}{2}k_\nu\left\{x^\nu,\Im^{-1}\right\}_+} + d_k^* v_k e^{\frac{i}{2}k_\nu\left\{x^\nu,\Im^{-1}\right\}_+}\right\}$$

$$\Psi \in U_\Re : D\Psi - m\Psi = 0$$

- From the field a wave function is constructed operating on a vacuum state

$$\psi = \Psi\left|0\right\rangle$$

- For a massless field, the (extended) **Dirac equation** becomes

$$D\psi = i\gamma^a\partial_a\psi = \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + i\gamma^4\partial_4\right)\psi = 0$$

  Factorizing the solution into the spinor part and the momentum eigenstate

$$\psi = u\left(k\right)e^{-\frac{i}{2}k_\nu\left\{x^\nu,\Im^{-1}\right\}_+}$$

with

$$\begin{aligned} \partial_\mu e^{-\frac{i}{2}k_\nu\left\{x^\nu,\Im^{-1}\right\}_+} &= -ik_\mu e^{-\frac{i}{2}k_\nu\left\{x^\nu,\Im^{-1}\right\}_+} \\ \partial_4 e^{-\frac{i}{2}k_\nu\left\{x^\nu,\Im^{-1}\right\}_+} &= -i\epsilon_5\ell\left(-k^\mu p_\mu+\tfrac{1}{2}k^2\right)e^{-\frac{i}{2}k_\nu\left\{x^\nu,\Im^{-1}\right\}_+} \end{aligned}$$

one obtains,

$$\begin{aligned} \left(\gamma^\mu k_\mu-\gamma^5\ell\tfrac{1}{2}k^2\right)u(k) &= 0 \qquad \epsilon_5=+1 \\ \left(\gamma^\mu k_\mu+i\gamma^5\ell\tfrac{1}{2}k^2\right)u(k) &= 0 \qquad \epsilon_5=-1 \end{aligned}$$

- Let $\epsilon_5=-1$. Iterating the equation

$$\left(k^2-\frac{\ell^2}{4}\left(k^2\right)^2\right)u(k)=0$$

This equation has two solutions, the massless solution ($k^2=0$) and another one, of large mass (ℓ being small)

$$k^2=\frac{4}{\ell^2}$$

Differential algebra and extended Dirac equation

- For $\epsilon_5 = +1$ one would obtain $k^2 = 0$ and

$$k^2 = -\frac{4}{\ell^2}$$

a tachyonic large $\left|k^2\right|$ solution.

- **Coupling the two solutions**

$$\mathcal{L} = \overline{u_1} i\gamma^\mu \partial_\mu u_1 + \overline{u_2}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^4 \frac{2}{\ell}\right) u_2 + \left(g\overline{u_1}\left(\langle\phi\rangle + h\right) u_2 + h.c.\right)$$

leads to the equations of motion:

$$\begin{array}{rcl} i\gamma^\mu \partial_\mu u_1 + g\left(\langle\phi\rangle + h\right) u_2 & = & 0 \\ \left(i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^4 \frac{2}{\ell}\right) u_2 + g^*\left(\langle\phi\rangle + h^*\right) u_1 & = & 0 \end{array}$$

which imply a small mass for the previously massless solution