Os formalismos físicos e a realidade matemática

Rui Vilela Mendes

Embora alguns dos avanços da matemática tenham sido comprovados ou estimulados pelas necessidades concretas das ciências físicas, acontece também muito frequentemente que estruturas matemáticas já existentes, e desenvolvidas muitos anos atrás, se revelam subitamente como o enquadramento exacto dos novos fenómenos que vão sendo descobertos. Isto levou alguns autores a referir-se e a espantar-se com o que eles chamam a eficiência não razoável da matemática.

Explorando as consequências exactas de um certo número de axiomas, as teorias matemáticas têm, enquanto objectos lógicos, uma consistência e realidade próprias que não dependem das eventuais aplicações que delas sejam feitas noutros domínios. Isto contrasta com o papel dos formalismos e teorias físicas, que são apenas úteis para a descrição do mundo natural num determinado momento histórico e que têm de ser constantemente modificados à medida que, através do aperfeiçoamento dos métodos experimentais, novos fenómenos são descobertos.

Usando alguns exemplos do passado, do presente e talvez do futuro, exemplifica-se o papel estruturador dos objectos matemáticos enquanto criadores das estruturas do possível.

1. *Introdução.*

Aqui há uns meses, dizia um professor de matemática de uma das nossas universidades, que essa ideia de ter institutos, congregando físicos e matemáticos numa estrutura comum, não passava de uma ideia de terceiro mundo. Dizia então que, para não se ser terceiro-mundista, o que fazia sentido, no «Portugal europeu de hoje», era ter, ou institutos de matemática, ou institutos de física, bem separados. Esta é uma afirmação curiosa e que, a ser tomada a sério, altera algumas das definições geográfico-económicas convencionais. Dois dos mais famosos institutos do mundo, em que coexistem sob uma estrutura comum físicos e matemáticos, são o Instituto de Estudos Avançados de Princeton e o Instituto de Altos Estudos Científicos de Bures-sur-Yvette. A acreditar, portanto, no nosso querido professor de matemática, os Estados Unidos e a França situar-se-iam então no terceiro mundo. Talvez, quem sabe.

Como eu, porém não tenho nada contra o terceiro-mundo, esteja ele onde estiver, uma das coisas que tentarei aqui fazer é mostrar como as interacções da física e da matemática podem ser enriquecedoras para ambos os domínios. Estas interacções processam-se de dois modos. Por um lado, alguns dos avanços da matemática são provocados, ou estimulados, pelas necessidades concretas das ciências físicas, mas, por outro lado, acontece também frequentemente que estruturas matemáticas já existentes, e desenvolvidas muitos anos atrás, aparecem como o enquadramento correcto dos novos fenómenos que vão sendo descobertos. Isto tem, ao longo dos tempos, levado diversos autores a espantar-se com o que eles chamam a *eficiência não-razoável da matemática*[1] ou a levantar questões do género:

«Quando se diz que as matemáticas são a contrapartida simbólica, no pensamento, da realidade material do Universo, fica-se confrontado com a questão enigmática de saber se o Universo é matemático»[2].

Será esta, porém, uma questão enigmática ou uma questão circular? Não será verdade que, tanto a percepção do mundo físico, como as estruturas matemáticas são produtos da mesma máquina cerebral? Todas as estruturas matemáticas criadas pelos humanos são, em última análise, suportadas por um subconjunto das ligações sinápticas possíveis das suas redes de neurónios. Mas também o são evidentemente todos os modelos que do mundo físico alguma vez possam ser construídos. Deste ponto de vista torna-se, pois, natural que os modelos físicos e as estruturas matemáticas tenham grande identidade, já que utilizam exactamente o mesmo contexto representatório.

Quando se fala das relações estreitas entre a física e a matemática, as da geometria não euclideana com a relatividade, da análise funcional e da teoria dos grupos com a física quântica são os exemplos mencionados por quase toda a gente, mesmo por aqueles que não os percebem muito bem. Em vez de elaborar nestes exemplos clássicos, tentarei discutir alguns aspectos mais recentes desta interacção entre a física e a matemática, que poderão ser de mais interesse para quem quiser fazer física ou matemática hoje, em vez de se dedicar à história.

2. *Números, valores absolutos, distâncias e estruturas ultramétricas.*

Os números naturais {1, 2, 3,...} juntamente com as operações de soma, subtracção, multiplicação e divisão, constroem-nos o conjunto (corpo) dos números racionais. Os racionais são, portanto, os números inteiros mais aqueles que podem ser representados como fracções de inteiros. Dadas as operações habituais da vida corrente, o corpo dos racionais é portanto uma espécie de corpo mínimo dos números necessários.

Quando se utiliza um conjunto de números para indexar uma certa quantidade, ou para indicar as localizações de um conjunto de pontos materiais, uma outra noção útil e natural é a de distância entre os pontos (ou distância entre os números correspondentes). A noção de *distância* entre dois números está relacionada com a noção de *valor absoluto*

$$d(x,y) = |x - y| \tag{1}$$

Um valor absoluto num corpo de números tem de facto as propriedades naturais que se esperariam para, através da definição (1), obter a noção de distância, nomeadamente

i) $|x| \geq 0$ (2.a)

ii) $|x| = 0$ se e só se $x = 0$ (2.b)

iii) $|xy| = |x||y|$ (2.c)

iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (2.d)

A questão seguinte que se põe é a de saber que tipos de funções (e portanto que tipos de distâncias) podemos ter, satisfazendo as condições i), ii), iii) e iv). O teorema de Ostrowski afirma que há três e apenas três tipos de valores absolutos:

1) O valor absoluto trivial: $|0| = 0$ e $|x| = 1$ se $x \neq 0$ (3.a)

2) O valor absoluto usual: $|x|_\infty = \sup(x,-x)$ (3.b)

3) O valor absoluto p-ádico: Para cada número primo p, $|0|_p = 0$ e para $x \neq 0$ será

$$|x|_p = \frac{1}{p^{\nu(x)}} \qquad (3.c)$$

em que $\nu(x)$ é o expoente de p na decomposição de x em factores primos.

Para a distância p-ádica, dois números x e y estarão próximos se a sua diferença for divisível por uma potência elevada de p, isto é, se o expoente ν de p for grande na expansão de x-y em factores primos.

$$|x - y|_p = \frac{1}{p^{\nu(x-y)}} \qquad (4)$$

O corpo dos racionais (Q) não é completo, nem para a distância habitual ($|x - y|_\infty = \sup(x - y, y - x)$), nem para as distâncias p-ádicas. Ao completá-lo com os limites das sequências convergentes em relação a $|\ |_\infty$ obtêm-se os números reais (R); ao completá-lo com sequências convergentes em relação a $|\ |_p$ obtém-se o corpo dos números p-ádicos (Q_p).

Todo o p-ádico x tem uma representação única da forma

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n \tag{5}$$

em que $0 \leq a_n < p$ e n_0 é um inteiro, positivo ou negativo. Esta representação chama-se expansão de Hensel. Portanto, dois números são próximos em distância p-ádica quando as respectivas expansões de Hensel coincidem desde n_0 até uma ordem n elevada. Por exemplo em 3-ádicos 1 está mais perto de 10 do que de 2.

$$d(1,2) = \frac{1}{3^0} = 1$$

$$d(1,10) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

De facto 1 está ainda mais perto de 244 do que de 2 ou de 10.

$$d(1,244) = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

Na figura 1 representam-se, através duma organização em árvore, alguns inteiros 3-ádicos. As ramificações da árvore representam os diversos termos da expansão de Hensel. A distância mede-se através do comprimento do percurso necessário para ir de um número a outro sobre a árvore.

Desta organização em árvore, que é a ordenação natural dos p-ádicos, resulta que estes constituem um conjunto totalmente descontínuo, em que não há pontos intermédios entre cada dois pontos. Isto contrasta com a estrutura dos números reais que, sendo naturalmente ordenados ao longo de uma recta, têm pontos intermédios e pode-se passar continuamente de um ponto a outro.

A natureza hierárquica e descontínua dos p-ádicos tem outras consequências interessantes. Se considerarmos, por exemplo, um movimento aleatório com saltos de comprimento limitado, ao contrário do que acontece com os reais, no caso dos p-ádicos o movimento permanece para sempre numa vizinhança do ponto de partida.

No caso do valor absoluto $|\ |_\infty$ tem-se $|x+x|_\infty > |x|_\infty$ se $x \neq 0$. A esta propriedade chama-se o *princípio de Arquimedes*. No caso dos p-ádicos, porém, $|x+x|_p \leq |x|_p$. Os p-ádicos são, portanto, um *corpo não-arquimedeano*.

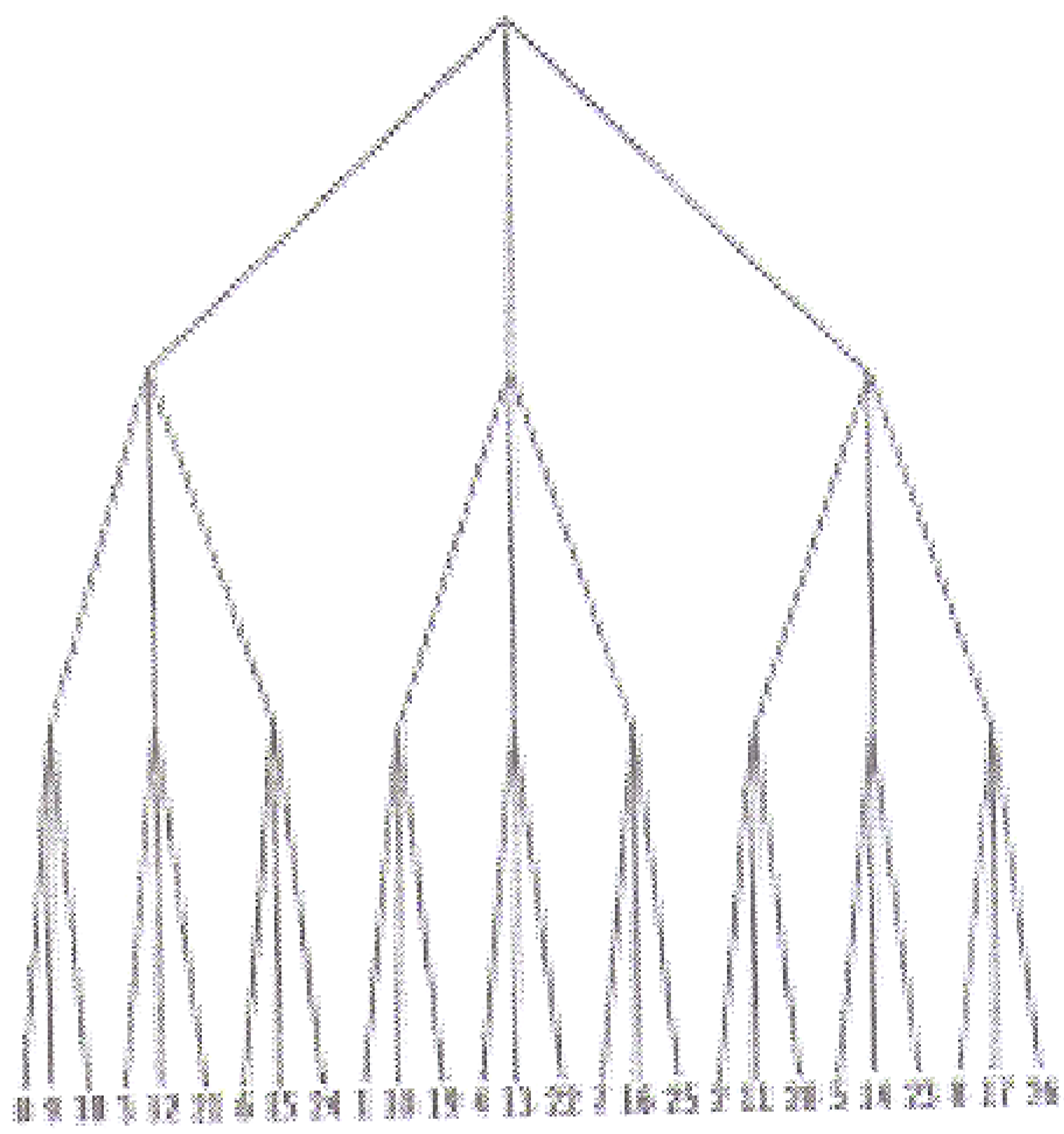


Figura 1. Ordenação em árvore dos inteiros 3-ádicos.
(1 está mais perto de 10 do que 2).

Da propriedade iv) do valor absoluto resulta para as distâncias a desigualdade triangular

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \cdot \tag{6}$$

No caso das distâncias p-ádicas, para além desta propriedade, verifica-se uma outra mais restritiva

$$d(x,z) \leq \text{Max}\ \{d(x,y), d(y,z)\}, \tag{7}$$

chamada *propriedade ultramétrica*. A ultrametricidade, encontrada primeiramente no contexto dos números p-ádicos, é porém uma estrutura que se pode realizar, com grande generalidade, em espaços topológicos. E a generalidade desta propriedade é que a torna útil em vários contextos das ciências físicas.

As propriedades geométricas impostas pelas distâncias ultramétricas são pouco usuais. Por exemplo:

— *Todo o ponto dentro de uma bola é um centro da bola.*
— *O diâmetro duma bola é igual ao seu raio.*
— *Todas as bolas são «fechabertas» (isto é, fechadas e abertas ao mesmo tempo).*
— *Duas bolas, ou são disjuntas, ou estão contidas uma dentro da outra.*

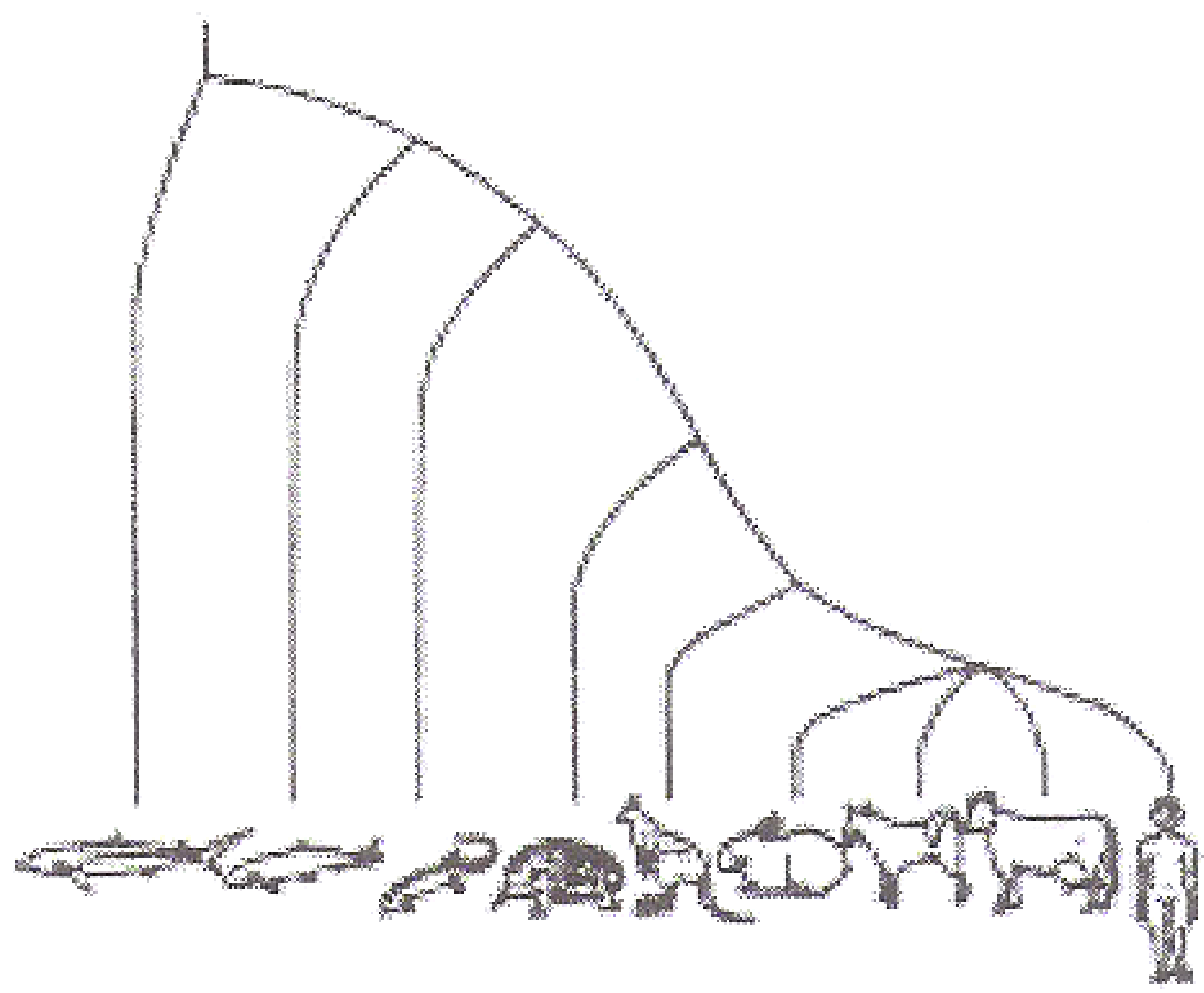
— *Todos os triângulos, ou são equiláteros, ou isósceles. Não há triângulos escalenos p-ádicos.*

Verificam-se facilmente estas propriedades usando a expansão de Hensel.

A distância habitual é uma noção útil que convive connosco no dia-a--dia. Porém, que dizer desta outra possibilidade que, partindo dos mesmos axiomas básicos, a matemática nos oferece? Que dizer desta outra distância com propriedades tão bizarras? Parece mesmo uma «aberração da Natureza» isso da esfera em que todos os pontos são centros!

Se meditarmos, porém, um pouco sobre a árvore dos inteiros 3-ádicos, vemos que a distância ultramétrica não é assim tão estranha. A distância habitual $| \ |_\infty$ só é natural quando as quantidades com que lidamos se podem ordenar naturalmente sobre uma recta. Para quantidades que se organizem duma forma hierárquica através de um processo de ramificação, as distâncias ultramétricas é que são naturais. Por exemplo, ao considerar a taxonomia animal baseada nas diferenças dos aminoácidos das cadeias de hemoglobina obtém-se a figura 2, onde se vê que a maneira natural de definir a distância entre espécies é através do ponto de divergência evolutiva, não através duma ordenação linear. Por exemplo, não faz sentido dizer que o cão está entre o homem e o coelho porque, de facto, os três formam um triangulo equilátero. E o coelho também não está entre o homem e o tubarão, de facto estão à mesma distância deste último, formando um triângulo isósceles. E triângulos escalenos não existem!

Na física a ultrametricidade fez a sua entrada em 1980 na caracterização de um novo tipo de transição de fase. As transições de fase clássicas estão associadas a violações de simetria. Por exemplo, na transição ferromagnética em que, abaixo de uma determinada temperatura, os momentos magnéticos se orientam preferencialmente numa direcção, é violada a simetria de rotação. O sistema deixa de ser invariante para rotações em torno de eixos arbitrários e passa apenas a ser invariante para rotações em torno da direcção de orientação preferencial dos momentos magnéticos. Como (na ausência de campo exterior) a direcção de magnetização pode ser qualquer, o que acontece, em termos energéticos, é que a energia livre é mínima e tem o mesmo valor para uma série de configurações distintas, cada uma delas correspondendo a uma direcção da magnetização total. É em princípio possível, sem alteração da energia, passar continuamente através de todos estes estados, isto é fazer rodar simultâneamente todos os



	85	84	84	80	75	80	75	79
		74	75	71	71	67	65	68
			71	67	69	65	64	62
				49	49	42	43	37
					37	33	26	27
						28	25	25
							28	23
								17

Figura 2. Árvore filogenética de vertebrados baseada nas diferenças dos aminoácidos da cadeia α da hemoglobina.

momentos magnéticos para uma configuração mínima diferente. Podemos, portanto, dizer que os diversos mínimos da energia livre se ordenam sobre uma recta real e que é possível passar continuamente dum mínimo para outro. O que foi descoberto em 1980 é que nos sistemas chamados «vidros de spin» os mínimos da energia livre se organizam segundo uma árvore com distâncias ultramétricas entre eles. Nos diversos mínimos a energia livre pode mesmo ter valores diferentes. Como a organização é ultramétrica, não havendo pontos intermédios nem interpolação contínua entre eles, se a temperatura for suficientemente baixa para as flutuações admissíveis estarem abaixo dos escalões da árvore, o sistema fica para sempre num mínimo local, mesmo que a energia seja muito maior que a do mínimo global. Não há qualquer possibilidade de eventualmente se alcançar o mínimo global por mais tempo que se espere. Aliás, o nome vidro de spin é qualitativamente incorrecto e foi posto quando ainda se acreditava que estes sistemas podiam eventualmente relaxar para o seu estado de energia mínima global.

Aquilo que distingue basicamente um vidro de spin doutros sistemas magnéticos é a existência de requisitos energéticos contraditórios e a sua distribuição desordenada. Algumas das interacções entre os momentos magnéticos próximos tendem a orientá-los na mesma direcção, enquanto outras tendem a orientá-los em sentido contrário. Isto conduz a situações em que não é possível satisfazer todas as condições locais. A este fenómeno chama-se *frustração*. Por exemplo, se considerarmos quatro momentos magnéticos colocados nos vértices dum quadrado e se três das ligações tenderem a orientá-los na mesma direcção e a quarta tender a orientá-los na direcção oposta, não é possível optimizar todos os requisitos.

Esta situação de requisitos contraditórios existe, não só nos vidros de spin, como também noutros sistemas físicos e biológicos. Por exemplo, nas redes neuronais, que são um modelo de algumas das funções cerebrais, as ligações entre os neurónios são, ou de reforço, ou de inibição. É então frequente obter situações de frustração. Nessas circunstâncias pode ser-se levado a uma organização ultramétrica dos pontos estáveis, com a eventual impossibilidade de sair dos mínimos locais. A estruturação de conhecimentos e conceitos através da experiência de vida dum indivíduo, ou mesmo a formação dos mitos duma sociedade, faz-se por vezes também através duma estruturação hierárquica dos conceitos. A compreensão de que este tipo de estruturas se organizam, não através da distância usual, mas através de distâncias ultramétricas, permitirá talvez compreender a dificuldade de alteração dos mitos ou ideias feitas. Quando a estrutura é ultramétrica, não há pontos intermédios e difusões limitadas nunca saem duma pequena vizinhança. Talvez a frase «Burro velho não aprende línguas» contenha a percepção intuitiva que a sabedoria popular faz das estruturas ultramétricas.

Finalmente, nada nos garante que o corpo dos números reais seja o corpo adequado para a descrição da física a distâncias da ordem do comprimento de Planck $\left\{\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1{,}616 \times 10^{-33}\,cm\right\}$ e várias tentativas têm sido feitas para utilizar corpos p-ádicos na gravitação quântica.

A introdução que fizemos, dos números p-ádicos e das estruturas ultramétricas através do teorema de Ostrowski, não obedece à sequência histórica da evolução da matemática. De facto os números p-ádicos foram introduzidos em 1897 por Hensel no contexto da teoria algébrica dos números, portanto antes da noção de espaço métrico, que data de 1906 e se deve a Fréchet. Por outro lado, o teorema de Ostrowski, que nos dá todas as possibilidades de valores absolutos, só foi provado em 1935, e a generalidade topológica dos espaços ultramétricos mostrada por Krasner em 1944. Tudo isto é, porém, irrelevante para os propósitos desta conferência, porque o facto é que toda esta maquinaria estava pronta quando a primeira aplicação à física aparece, em 1980.

Tal como noutros casos, uma estrutura matemática que é criada através da exploração do «jogo das possibilidades», que é a essência da matemática, torna-se num dado momento histórico o formalismo adequado para descrever um sistema físico. O facto de ter uma aplicação à física, ou a qualquer outra ciência natural, não aumenta nem diminui o grau de «realidade» da estrutura matemática. A estrutura matemática, enquanto estrutura consistente com os seus axiomas básicos, tem a sua realidade própria, no sentido que é imutável enquanto os axiomas não forem alterados. O mais que lhe pode acontecer é que novos teoremas sejam acrescentados, que são ainda compatíveis com os mesmos axiomas. Isto é, novos pedaços de realidade são acrescentados à preexistente. A situação na física e nas outras ciências naturais é bastante diferente. As teorias e os seus formalismos só têm sentido na medida em que descrevam os resultados das experiências. E como, à medida que os métodos experimentais se vão refinando, se obtêm novos resultados, as teorias tendem a ser alteradas para as tornar compatíveis com esses novos resultados. Acontece mesmo, frequentemente, que uma pequena alteração nos resultados experimentais conduz ao abandono completo dum formalismo e à adopção doutro completamente diferente. Deste modo uma estrutura matemática, enquanto matemática, tem a sua realidade própria. Enquanto formalismo duma teoria física, é apenas uma ferramenta de trabalho útil num dado momento histórico.

3. *Teoria das deformações das álgebras, teorias físicas e constantes fundamentais.*

O objectivo da teoria das deformações é determinar todas as estruturas matemáticas dum certo tipo, organizando-as primeiro em famílias contínuas e depois determinando como é que estruturas próximas se relacionam umas com as outras. A ideia de estudar famílias contínuas de objectos abstractos teve talvez a sua origem nos trabalhos de Riemann.

Quando entre os objectos de duas estruturas matemáticas existe uma correspondência biunívoca tal que as operações são preservadas, diz-se que as duas estruturas são isomorfas. Isto é, elas são duas realizações duma mesma estrutura abstracta. Um dos objectivos da teoria das deformações é classificar todas as classes de estruturas de um certo tipo, cada classe contendo apenas estruturas isomorfas entre si. Um problema central que se põe é o da *rigidez*, ou *estabilidade*, perante as deformações. Uma estrutura E_0 diz-se rígida quando, para toda a deformação t (em que t é o parâmetro da deformação), a nova estrutura E_t é isomorfa a E_0. Esta noção é particularmente importante nas aplicações físicas porque, quando se trata de construir modelos dos fenómenos naturais, interessa sobretudo considerar as propriedades do modelo que não são muito sensíveis a pequenas alterações do modelo. Uma vez que o modelo é apenas uma aproximação do mundo real, é de esperar que sejam apenas as propriedades mais estáveis do modelo as que têm alguma hipótese de coincidir com as dos fenómenos observados.

As estruturas matemáticas cujas deformações nos vão interessar são as álgebras de Lie. Uma álgebra de Lie G é um espaço linear com uma operação $[X,Y]$, chamada o parêntesis de Lie, que satisfaz:

$$[X,Y] = - [Y,X] \qquad (8)$$

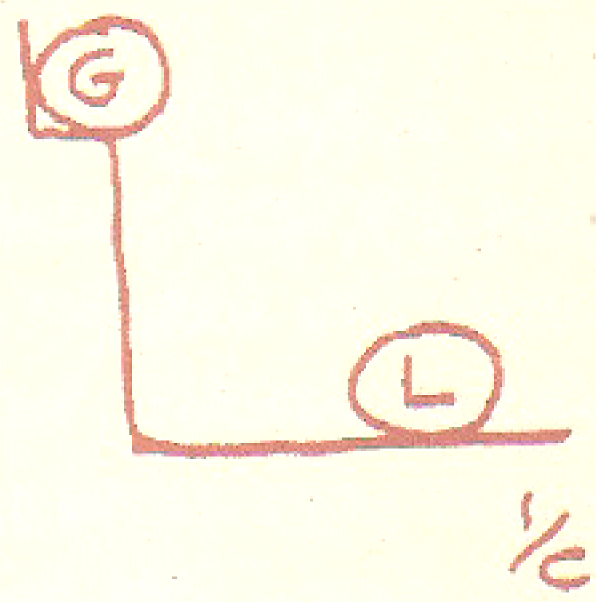
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \qquad (9).$$

Estas propriedades são as propriedades que os comutadores satisfazem.

A teoria das deformações das álgebras de Lie deve-se a Gerstenhaber, Nijenhuis e Richardson e baseia-se na cohomologia dessas álgebras. Aqui indicaremos apenas, dum modo qualitativo, os resultados que se obtêm por aplicação da teoria das deformações a algumas álgebras de interesse físico. Num apêndice definem-se as noções básicas da cohomologia das álgebras de Lie. Podem obter-se mais detalhes por consulta da bibliografia complementar. O resultado central da teoria das deformações diz que, se o segundo grupo de cohomologia (em relação à representação adjunta) $H^2(G,G)$ é nulo, então a álgebra é rígida. Isto é, todas as deformações são equivalentes ao ponto de partida, ou o que é o mesmo, a estrutura algébrica é estável. O método de exploração das possibilidades de modelos algébricos é portanto bem definido: Dada uma álgebra calcula-se $H^2(G,G)$. Se não for nulo quer dizer que existem deformações não-triviais; e vai-se deformando a álgebra até encontrar as classes estáveis. Serão então estas últimas as que com maior probabilidade poderão proporcionar modelos estáveis dos fenómenos naturais. Vejamos dois exemplos:

1) Consideremos a álgebra de Lie do grupo cinemático da mecânica não-relativista, isto é, o grupo de Galileu. Este grupo contém as rotações e as transformações de referencial (galileanas). O segundo grupo de cohomologia desta álgebra não é nulo e por deformação obtém-se a álgebra do grupo de Lorentz. Esta última, sim, é estável. Deste ponto de vista o grupo de Lorentz aparece como o grupo natural para servir de modelo físico.

GRUPO DE GALILEU $\rightarrow$ GRUPO DE LORENTZ



$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijn} K_n$$

$$[K_m, K_n] = 0 \;\hookrightarrow\; -i\frac{1}{c^2}\epsilon_{mnj} J_j$$

ALGEBRA DE POISSON $\rightarrow$ ALG. DE MOYAL-VEY

$$\{f, g\} = P(f,g) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

$$= \sum \omega^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} f \frac{\partial}{\partial x^j} g$$

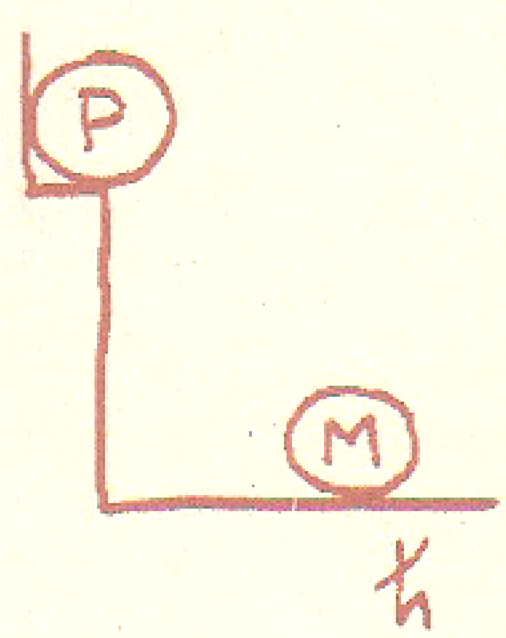
$$q_i = \{x_1 \cdots x_N\}$$

$$p_i = \{x_{N+1} \cdots x_{2N}\}$$

$$P^r(f,g) = \sum \omega^{i_1 j_1} \cdots \omega^{i_r j_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} f \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} g$$

$$\{f, g\}_M = \frac{1}{\hbar} \operatorname{sh}(\hbar P)(f,g)$$

$$= \{f, g\} + \frac{\hbar^2}{3!} P^3(f,g) + \cdots$$



Que a natureza tivesse escolhecido o ponto particular e instável correspondente ao grupo de Galileu é que seria algo aberrante.

Note-se que, juntando à álgebra de Lorentz as translacções no espaço e no tempo, obtém-se a álgebra de Poincaré, a qual tambem não é estável. Para obter estabilidade, uma nova deformação conduz às álgebras do grupo de De Sitter.[34]

2) Consideremos agora a álgebra de Lie das funções no espaço de fase da mecânica clássica. O parêntesis de Lie neste caso é o parêntesis de Poisson. Tal como no caso da álgebra de Galileu, verifica-se que esta álgebra tem deformações não-triviais e a classe estável que se obtém por deformação é a da álgebra de Moyal-Vey. Esta álgebra é exactamente a da mecânica quântica e, tal como anteriormente, concluiu-se que a mecânica clássica constitui um modelo algébrico instável e que a mecânica quântica é que é o modelo natural nesta família de modelos.

Quando, por deformação, se obtém uma estrutura algébrica rígida, qualquer deformação nessa vizinhança conduz a álgebras que são todas equivalentes. Esta família de álgebras equivalentes é parametrizada pelo parâmetro de deformação. Por exemplo, no caso da álgebra de Lorenz o parâmetro é $1/c$, em que c é a velocidade da luz. O parâmetro é zero no ponto instável correspondente à álgebra de Galileu e, para qualquer outro valor, obtém-se sempre a álgebra de Lorenz. Portanto, o ponto de vista das deformações mostra que a estrutura algébrica por si só não permite fixar a velocidade da luz, porque qualquer que ela fosse, desde que finita, a álgebra seria sempre a de Lorenz. O parâmetro (a velocidade da luz neste caso) é, portanto, uma constante fundamental a obter das experiências. No caso da deformação da álgebra de Poisson para a álgebra de Moyal-Vey o parâmetro é a constante de Planck $\hbar$(com dimensões de acção = ML^2T^{-1}). $\hbar$ é zero no caso instável de Poisson e tem um valor qualquer no caso de Moyal-Vey. Deste modo, a teoria das deformações define-nos não só as estruturas estáveis como também nos indica quais são as constantes fundamentais a fixar a partir dos resultados experimentais.

Uma vez fixada a escala das velocidades e da acção, todas as grandezas físicas se exprimem em potências de comprimento. Se, por sua vez, se fixar a escala de comprimentos, todas as grandezas físicas se tornam adimensionais, números puros. Como vimos, as escalas da velocidade e da acção são fixadas por deformações para pontos estáveis. Uma questão que se pode, portanto, pôr é a de saber qual será a deformação que fixará a escala de comprimentos e tornará a física adimensional. Esta é uma questão que ainda aguarda resposta.[34]

4. *O papel da Matemática.*

A matemática, como vimos, fornece à física os quadros estruturantes que vão permitindo a interpretação dos fenómenos naturais em corpos teóricos simples e bem definidos. Neste sentido, a maior utilidade que um matemático pode ter para a física é através da criação de novas estruturas e do seu pleno desenvolvimento matemático.

Pôr à disposição das ciências da natureza novas estruturas matemáticas, ou aperfeiçoar as existentes, é bem mais útil que encher revistas com a chamada «matemática feita a propósito da física».

Este tipo de «matemática aplicada» não tem, em geral, grande utilidade porque, sendo na maior parte dos casos feita por matemáticos que não têm um conhecimento profundo da física, trata de problemas antiquados ou problemas de interesse marginal.

Claro que criar novas estruturas matemáticas, ou provar resultados de impacto na própria matemática, é bem mais difícil do que provar o mesmo tipo de teoremas numa equação ligeiramente diferente. Parafraseando Einstein: há uma grande diferença entre fazer muitos furos numa tábua macia ou fazer um só furo que seja numa tábua dura.

Mas é compreensível. A pressão das carreiras obriga a publicar e a tentação de fazer furos em tábuas macias é forte, para não perder o emprego. Se for investigador do INIC, claro que perde o emprego de qualquer modo, quer tenha feito furos em tábuas macias ou em tábuas duras. Mas isso são singularidades da nossa democracia de sucesso.

Resumindo e em jeito de conclusão: «Procurem os matemáticos criar as estruturas do possível, que o possível se encarregará de as tornar obrigatórias».

Esta visão da matemática opõe-se, porém, a uma outra visão mais imediatista, não só da matemática, como do trabalho científico em geral. Há algum tempo, interrogado por um jornalista sobre estas matérias, um Secretário de Estado exortava os cientistas a deixarem-se de fantasias e a «fazer pela vida». Em circunstâncias semelhantes o Ministro da tutela do sector da investigação dizia que «a investigação deve ser orientada pelo mercado». Diz a lenda que foi a queda de uma maçã que inspirou Newton. Ora hoje ninguém duvida da utilidade prática da lei de atracção gravítica. Basta pensar nos satélites de comunicações que transmitem os Campeonatos de Futebol da UEFA e as informações da bolsa de Tóquio. Tudo coisas muito úteis. Mas na altura de Newton a lei de atracção universal devia estar bem longe das preocupações do chanceler do reino. Pensar em tais coisas devia ser um sintoma da «ineficiência da ciência», para usar uma outra frase de um nosso governante. E se Newton tivesse antes pensado nos ditames do mercado que teria sucedido? Talvez isto:

Figura 3. E se Newton se orientasse pelas regras do mercado ...

Claro que eu não tenho nada contra as leis e os mecanismos do mercado. O que eu digo é apenas: «As leis do mercado para os mercadores e as leis da criação científica para os cientistas». Por favor não misturem as coisas. Que cada qual faça o que lhe compete e o faça bem. Eu também não peço ao governo para fazer investigação científica. Bastar-me-ia que governasse bem.

NOTAS

1 E. Wigner, *Symmetries and Reflections*, MIT Press, 1970.

2 M. Paty; «Mathématisation et accord avec l'expérience», *Fundamenta Scientiae*, vol. 5, p. 31, 1984.

3

4

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, Presses Universitaires de France, 1975.

R. Rammal, G. Toulouse e M. A. Virasoro, *Ultrametricity for physicists*, Reviews of Modern Physics, vol. 58, p. 765, 1986.

I.Ya. Aref'eva, B. Dragovich, P. H. Frampton e I. V. Volovich, *The wave function of the universe and p-adic gravity*, International Journal of Modern Physics A, vol. 6, pp. 4341, 1991.

B. G. Dragovic, *On signature changes in p-adic space-times*, Modern Physics Letters A, vol. 6, p. 2301, 1991.

M. Hazewinkel e M. Gerstenhaber, *Deformation theory of algebras and structures and applications*, Kluwer Academic Publishers, 1988.

R. Hermann, *Vector bundles in Mathematical Physics*, vol.2, cap. 3, Benjamin, 1970.

F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz e D. Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization*, Annals of Physics, vol. 111, pp.61 e 111, 1978.

Apêndice

Cohomologia das álgebras de Lie

Seja G (com elementos $X_i \in G$) uma álgebra de Lie e $\rho: G \rightarrow V$ uma representação de G por transformações lineares num espaco vectorial V.

Uma *n-cocadeia* ω é uma aplicação linear antisimétrica de G x ... x G em V

$$X_1, \ldots, X_n \rightarrow \omega(X_1, \ldots, X_n) \in V$$

Com a adição e o produto por escalares, as cocadeias de ordem n formam um espaço vectorial $C^n(G,V)$.

$C^0(G,V)$ é , por definição, o próprio V.

A *derivada exterior* $d : C^n(G,V) \rightarrow C^{n+1}(G,V)$ é

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \rho(X_i) \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{n+1})$$
$$+ \sum_{1 \leq i \leq j \leq n+1} \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{n+1}, [X_i, X_j]) \tag{A.1}$$

O sinal ^ sobre um argumento significa que esse mesmo argumento é omitido.

Uma cocadeia ω diz-se um *cociclo* se $d\omega$=0. Diz-se uma *cofronteira* se for uma derivada exterior doutra cocadeia, isto é $\omega \in d\,(C^{n-1}(G,V))$. Uma vez que $d(d\omega)$=0, todas as cofronteiras são cociclos, porém nem todos os cociclos são necessariamente cofronteiras.

Designando por $Z^n(\rho)$ o espaço dos cociclos e por $B^n(\rho)$ o espaço das cofronteiras, o *grupo de cohomologia de ordem n* é o quociente

$$H^n(\rho) = \frac{Z^n(\rho)}{B^n(\rho)} \, . \tag{A.2}$$

O grupo de cohomologia será trivial quando todos os cociclos forem cofronteiras. A importância disto para a teoria das deformações e a seguinte:

Consideremos no espaço vectorial G a seguinte deformação duma álgebra de Lie cujo parêntesis é $[X, Y]_0$:

$$[X,Y]_\lambda = [X,Y]_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j (X,Y)\lambda^j \tag{A.3}$$

λ é o parâmetro de deformação e ω (X,Y) é um elemento de G. Para que $[X,Y]_\lambda$ seja ainda um parêntesis de Lie é necessário que satisfaça a condição (9), chamada identidade de Jacobi. Para que $[X,Y]_\lambda$ definido em (A.3) satisfaça a identidade de Jacobi é necessário que $d\omega_1 = 0$, isto é que ω_1 seja um cociclo. Se ω_1 for uma cofronteira (isto é $\omega_1 = d\theta_1$) existe uma transformação linear em G que permite eliminar o termo de ordem l em (A.3). Aplicando de novo a identidade de Jacobi obtém-se agora $d\omega_2 = 0$. Se, por sua vez, $\omega_2 = d\theta_2$, elimina-se o termo em λ^2 . Se se puder continuar este processo indefinidamente, prova-se então que a álgebra deformada $[X,Y]_\lambda$ é equivalente à inicial $[X,Y]_0$. Portanto, só existem deformações não triviais quando alguns cociclos não são cofronteiras, isto é, quando o segundo grupo de cohomologia $H^2(G,G)$ não é nulo.