MEDIDAS DE COMPLEXIDADE E AUTO-ORGANIZAÇÃO

As ciências da complexidade estudam o comportamento complexo dos sistemas simples e o comportamento colectivo emergente dos sistemas complexos. A caracterização quantitativa da noção de complexidade revela-se porém difícil e parece depender do aspecto particular que se pretende descrever. De qualquer modo não era de esperar que medir a complexidade fosse um problema simples

R. VILELA MENDES

Alguns sistemas simples exibem comportamentos bastante complexos. Por exemplo o pêndulo duplo, um sistema com apenas dois graus de liberdade, embora perfeitamente determinado por equações de evolução simples, tem um movimento aparentemente errático e imprevisível (Fig. 1). Existem muitos outros sistemas simples com comportamentos deste tipo [1] [2] [3].

Pois se até sistemas simples mostram comportamentos complexos, seria de esperar que sistemas complexos, com muitas partes em interacção (muitos graus de liberdade), mostrassem comportamentos ainda mais complexos. Isto é verdade em certos casos como o da atmosfera terrestre, a qual se torna praticamente imprevisível para além de tempos muito curtos, como qualquer espectador do boletim meteorológico poderá testemunhar.Mas nem sempre assim acontece. Um organismo humano tem biliões de células e um cérebro com 10^{11} neurónios. Juntando uns milhares de tais organismos, seria de esperar um comportamento tão complexo que só uma inteligência sobre-humana poderia vislumbrar. Porém, na maior parte dos casos, os tais organismos exibem comportamentos decepcionantemente simples. Basta, por exemplo, examinar a assistência dum jogo de futebol, dum comício político ou dum espectáculo musical (Fig. 2). O que observamos neste caso é uma estruturação colectiva das partes do sistema que conduz neste exemplo a um comportamento sincronizado e, em geral, a um conjunto de comportamentos padronizados e previsíveis, já que condicionados por estruturas interpessoais, sociais e culturais bem mais simples que os organismos que nelas participam.

Licenciado em Engenharia Electrotécnica (IST), doutorado em Física Teórica (Universidade do Texas, Austin, EUA), agregado em Matemática Aplicada (Universidade de Lisboa), Rui Vilela Mendes era investigador coordenador do INIC quando o XII Governo Constitucional extinguiu aquela instituição (1992). Actualmente é investigador coordenador da Universidade Técnica de Lisboa e membro do Grupo de Física-Matemática. Autor ou coautor de cerca de uma centena de trabalhos de Física Teórica ou Física Matemática, publicados em revistas internacionais, foi professor ou investigador visitante em instituições dos EUA, Israel, França, Alemanha e Suíça. Sócio correspondente da Academia das Ciências de Lisboa, entre os seus interesses científicos actuais contam-se a Dinâmica Não-Linear e a Complexidade.

O conjunto de técnicas e métodos a que, dum modo algum indefinido, se dá o nome de *Ciências da Complexidade* estuda estes dois casos:

1 - O comportamento complexo dos sistemas simples (chamados simples por terem poucos graus de liberdade).

2 - O comportamento colectivo e estruturado dos sistemas complexos (chamados complexos por terem muitos graus de liberdade).

No primeiro caso a noção de complexidade está associada à dificuldade de prever o comportamento do sistema e no segundo à criação de estruturas.

A identificação e a função das estruturas tem um subtil aspecto dual. Quando se diz que o "escoamento dum fluido se faz em turbilhões" ou que a "multidão gritou enraivecida" estamos a tomar o papel do observador exterior que, em vez de descrever a velocidade de cada uma das moléculas do fluido ou a intensidade vocal de cada um dos elementos da multidão, comprime essa informação através da identificação de estruturas globais. Portanto neste caso as estruturas servem apenas os propósitos do observador, estão associadas à sua compressão de informação na descrição dos fenómenos e não desempenham qualquer papel na dinâmica interna do sistema complexo que está a ser descrito. No extremo poderíamos dizer que estas es-

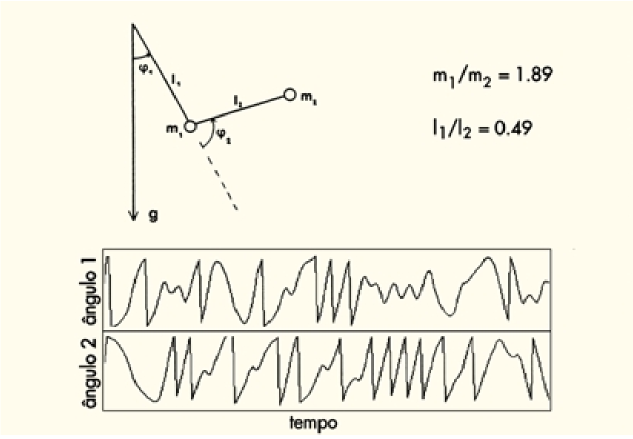

Fig. 1 - O pêndulo duplo. O comportamento complexo dum sistema simples.

truturas só existem porque o observador externo as identifica como tal.

Por outro lado quando, no esquema evolutivo dos seres vivos, um conjunto de células se associam num ser multicelular criando uma parede em relação ao mundo exterior, duas coisas sucedem. Por um lado ao criar uma nova unidade funcional competitiva as células perdem as vantagens eventuais duma dinâmica individual competitiva, tendo de realizar uma dinâmica de cooperação. Por outro lado isto permite-lhes erigir uma parede em relação ao mundo exterior e ficar ao abrigo da competição de outras células que passam a ser definidas como parasitas (Fig. 3) [4]. Neste caso portanto a nova estrutura multicelular tem um efeito funcional determinante na dinâmica do sistema, independentemente do facto de ser ou não usada na compressão de informação dos observadores exteriores.

Da discussão anterior um aspecto ressalta imediatamente, que é o de que na criação de estruturas nos sistemas complexos o factor determinante é a natureza da *interacções* entre os *agentes* que compõem o sistema complexo. Um dos comportamentos mais estruturados que nós conhecemos é o comportamento inteligente dos animais. A inteligência é provavelmente um fenómeno adaptativo, como já fora sugerido por Darwin. Tradicionalmente as evoluções adaptativas têm sido associadas às pressões do mundo natural. Porém estudos recentes [5], sobre o desenvolvimento da inteligência nos primatas, concluíram que o mecanismo essencial é o da adaptação ao ambiente social mais do que ao ambiente natural. Isto é, o desenvolvimento desta estrutura depende principalmente da interacção com os outros agentes.

Na descrição dos sistemas complexos a identificação das estruturas desempenha um papel fundamental. No

Fig. 2 - O comportamento simples dum sistema complexo (*O Animal Humano*, Desmond Morris, Gradiva 1996).

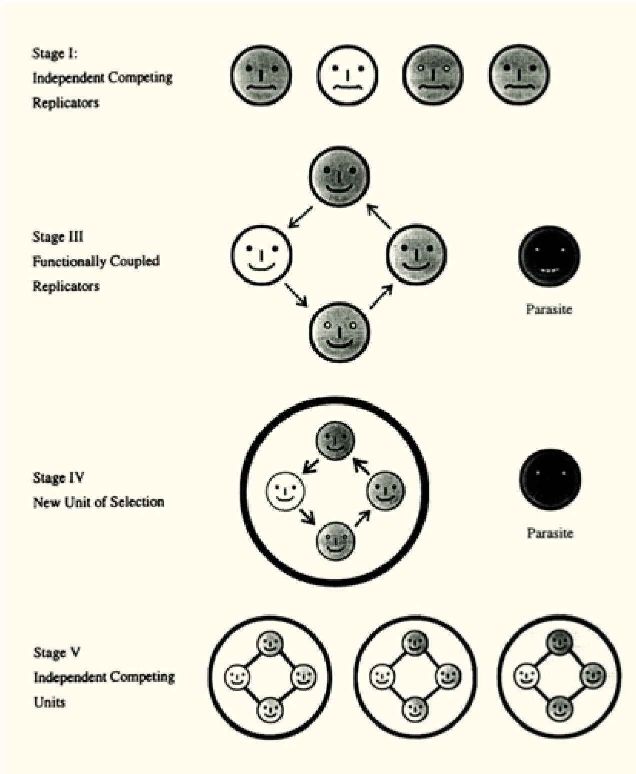

Fig. 3 - Um modelo de formação de uma hierarquia de unidades biológicas (segundo P. Schuster [4]).

caso da evolução biológica, ilustrado na Figura 3, as novas estruturas são seres multicelulares parcialmente separados do meio exterior por uma parede física. Noutros casos as paredes são, por exemplo, um conjunto de mitos nacionais, religiosos ou raciais. A dinâmica das interacções entre as partes dum sistema complexo é um mecanismo poderoso e inovador, que cria estruturas e comportamentos radicalmente diferentes do comportamento isolado de cada uma das partes. As interacções entre cada dois elementos do sistema podem ser fracas mas, no seu conjunto, o efeito é irresistível. Exigiria uma enorme energia fazer com que um número significativo de partes do sistema se afastassem do comportamento colectivo. Por exemplo: É estranho que um povo, gritando contra um hipotético inimigo que vive quase do outro lado do planeta, se tenha lançado alegremente numa guerra santa contra os seus irmãos de religião. Antes porém de subestimarmos as capacidades mentais de quem quer que seja, as quais afinal são biológicamente equivalentes em todo o mundo, dever-nos-iamos lembrar da dificuldade que teria um átomo dum ferromagneto em orientar o seu momento contra a polarização dominante, ou uma gota de água em nadar contra a corrente em dia de enxurrada.

A natureza da complexidade dos fenómenos tem este aspecto dual: Por um lado alguns sistemas, mesmo aparentemente simples, têm uma riqueza dinâmica tal que o seu comportamento é na prática imprevisível. Por outro lado as interacções entre os elementos dum sistema composto por muitas partes cria novas estruturas, que podem ser simples ou elas próprias bastante complexas. Nalguns casos concretos que têm sido estudados verifica-se mesmo que as estruturas criadas são tanto mais ricas e diversas quanto mais próximo o sistema estiver duma transição para um estado de imprevisibilidade (“caoticidade”) absoluta. Isto sugeriu a expressão pitoresca *“a vida à beira do caos”*.

Em Ciência, noções como complexidade, imprevisibilidade, caos ou frases pitorescas, por mais sugestivas que elas sejam, são noções vagas, sem grande valor, até o momento em que são traduzidas em quantidades que possam ser expressas matematicamente e correspondam a grandezas que possam ser medidas. No que diz respeito à noção de imprevisibilidade ou caos, a situação é clara e solidamente estabelecida. O fenómeno tem a ver com a chamada *dependência sensível das condições iniciais* e as grandezas matemáticas correspondentes são *os expoentes de Lyapunov* e *a entropia de Kolmogorov-Sinai*. No que diz respeito à construção de uma grandeza capaz de caracterizar a criação de estruturas, a riqueza estrutural e dinâmica das mesmas e, dum modo geral, medir a complexidade dum sistema, a situação não é tão clara. As grandezas que têm sido propostas parecem cada uma caracterizar apenas um aspecto particular do problema. O modo como se quantifica a noção de caos será descrito na secção seguinte e as diversas medidas de complexidade e auto-organização, que têm sido propostas, serão discutidas posteriormente.

Alguns autores têm questionado se valerá realmente a pena procurar grandezas capazes de medir a complexidade dos sistemas. Anderson [6], por exemplo, diz sobre as medidas de complexidade:

“Será preciso nós sabermos? Não é tudo o que estudamos suficientemente complexo para estar fora de qualquer escala? E se não estiver fora da escala, será que nos interessa?”

Pode de facto ser verdade que, até agora, não se construiu uma noção quantitativa capaz de caracterizar todos os aspectos dos sistemas complexos. Mas como poderemos nós avaliar a dinâmica e os factores que influenciam a evolução dos sistemas se não tivermos ao nosso dispor um certo número de grandezas com as quais construir modelos que sejam calculáveis e possam ser comparados com os dados experimentais? A dificuldade de encontrar uma só quantidade pode apenas indicar que ela de facto não existe e que cada aspecto tem de ser caracterizado por uma grandeza distinta e uma ferramenta matemática própria. Manin [7] afirmou que o papel da Matemática é fornecer metáforas acerca da Natureza e da Humanidade. E o estudo dos sistemas complexos, ao envolver muitos ramos da Matemática, parece bastante exigente em metáforas [8].

A IMPREVISIBILIDADE DO COMPORTAMENTO DE ALGUNS SISTEMAS SIMPLES. DEPENDÊNCIA SENSÍVEL DAS CONDIÇÕES INICIAIS, EXPOENTES DE LYAPUNOV E ENTROPIA DE KOLMOGOROV-SINAI

Um exercício simples, que ilustra bem o fenómeno essencial, consiste em meter, no interior dum rectângulo branco, uma frase escrita com tinta preta e dar aos pontos do rectângulo a seguinte transformação

$$x \rightarrow x + y \qquad (\text{mod. } 1)$$

$$y \rightarrow x + 2y \qquad (\text{mod. } 1)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A Figura 4 mostra o resultado duma experiência deste tipo em que à frase "*A Matemática da Complexidade*" foi aplicada quatro vezes esta transformação. O resultado é absolutamente incompreensível. Fica tudo misturado. A informação que existia no título inicial e que provinha da posição relativa dos pontos negros (sobre o fundo branco) fica totalmente perdida.

Porém se, em vez da transformação anterior, fizermos a mesma experiência com a transformação:

$$x \rightarrow \frac{6}{7}x - \frac{5}{7}y \qquad (\text{mod. } 1)$$

$$y \rightarrow \frac{5}{7}x + \frac{4}{7}y \qquad (\text{mod. } 1)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6/7 & -5/7 \\ 5/7 & 4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o resultado será o que se mostra na Figura 5. Desta vez ainda se percebem algumas letras. À primeira vista parece estranho! Afinal o que haverá de tão diferente entre as duas transformações? As matrizes de transformação são ambas matrizes numéricas, simples transformações lineares, e até têm ambas determinante igual a um. A diferença é que no primeiro caso a matrix é hiperbólica e no segundo caso é elíptica. No segundo caso os dois valores próprios são complexos e de modulo um, enquanto que no primeiro são reais,

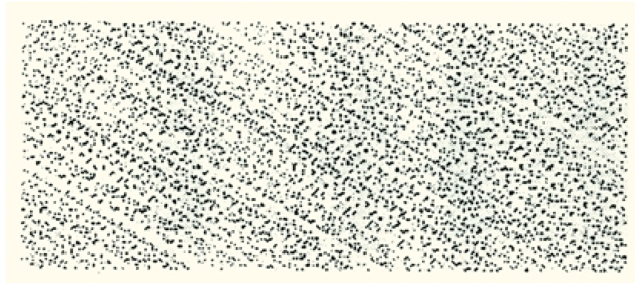

Fig. 4 - " A Matemática da Complexidade" depois de 4 transformações com uma matriz hiperbólica.

um deles maior que um e o outro menor que um. (Recordemos que o produto dos dois valores próprios tem de ser um porque o determinante vale um). No segundo caso a transformação efectua apenas uma rotação da imagem enquanto que no primeiro há uma direcção que se expande e outra que é comprimida. Neste processo de esticar numa direcção, comprimir na outra e depois dobrar-se sobre si própria, perde-se a coerência da imagem porque pontos que estavam próximos vão-se afastando cada vez mais e, no final, fica tudo misturado.

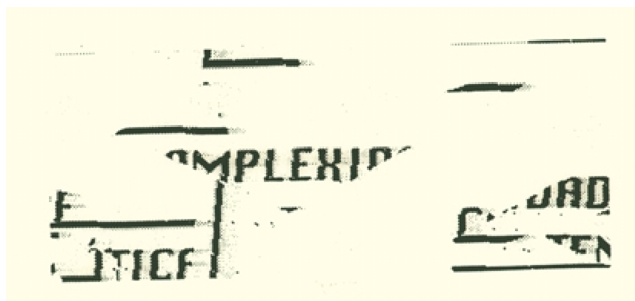

Fig. 5 - "A Matemática da Complexidade" depois de 4 transformações com uma matriz elíptica.

O fenómeno que acabámos de ilustrar é a base do chamado *comportamento caótico dos sistemas dinâmicos*. E embora se trate aqui duma lei de transformação perfeitamente determinista, o comportamento diz-se caótico porque, na prática, o resultado é imprevisível. Suponhamos que queremos prever a trajectória de um ponto de coordenadas (0.5,0.5) que marcamos a lápis no interior do quadrado. Fazendo as contas com a primeira das transformações, é fácil de ver que ao fim de 7 iterações o ponto deverá estar na posição (0.0,0.5). Mas basta que na marcação inicial tenhamos feito um pequeno erro de 0,001 para que, ao fim de 7 iterações, o erro se possa ter tornado da ordem de 1. Isto é, o ponto pode estar em qualquer sítio dentro do quadrado e a nossa previsão não serviu para nada. A este fenómeno chama-se *dependência sensível das condições iniciais*.

Matematicamente a grandeza que caracteriza este fenómeno é o maior *expoente de Lyapunov* (λ_1) que é obtido pelo seguinte limite

$$\lambda_1 = \lim_{\substack{\Delta(0) \to 0 \\ t \to \infty}} \frac{1}{t} \log \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \qquad (1)$$

isto é, dá-se à condição inicial uma pequena perturbação $\Delta(0)$ e vê-se como essa perturbação evolui no tempo. O expoente de Lyapunov é a média ao longo da trajectória da taxa de crescimento exponencial da perturbação, no limite das pequenas perturbações. Sendo uma média ao longo da trajectória, o expoente de Lyapunov depende sobretudo dos valores da taxa de expansão nas regiões onde a trajectória permanece mais tempo. Portanto o expoente de Lyapunov é uma grandeza associada à distribuição probabilística das trajectórias (tecnicamente diz-se que é um invariante ergódico).

Para uma perturbação genérica $\Delta(0)$ das condições iniciais, o que se obtém com o limite da equação (1) é a maior taxa de expansão. Porém, em cada ponto da trajectória, em vez da expansão numa direcção apenas, poderíamos ter considerado a matriz completa das divergências locais. Tomando o valor médio do produto dessas matrizes ao longo da trajectória e diagonalizando a matriz resultante obtém-se *um espectro de expoentes de Lyapunov*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots$$

Diz-se que o sistema é *caótico* quando um pelo menos destes expoentes é positivo, isto é quando os erros nas condições iniciais são amplificados ao longo do tempo.

Uma outra grandeza importante, associada também à estrutura probabilística do sistema dinâmico, é a *entropia de Kolmogorov-Sinai*. Pode ser definida do modo seguinte: Façamos uma *partição* do espaço de estados do sistema em várias partes

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4, \ldots$$

Através dos tempos de permanência (de órbitas típicas do sistema), pode associar-se a cada um dos elementos da partição uma medida da probabilidade μ de encontrar o estado do sistema dinâmico nesse elemento da partição. Consideremos no instante inicial t_0 um ponto arbitrário x e o elemento da partição P_x que contém o ponto x. Ao longo do tempo o ponto irá visitar outros elementos da partição. O conjunto $B_t(x)$ dos outros pontos de P_x que acompanham x, visitando simultaneamente os mesmos elementos da partição, vai diminuindo ao longo do tempo t. O teorema de Breiman garante a existência do seguinte limite

$$h(x,P) = -\lim \frac{1}{t} \log \mu\,(B_t(x)) \qquad (2)$$

em que $\mu\,(B_t(x))$ é a probabilidade associada ao conjunto $B_t(x)$. Tomando o supremo deste limite sobre todas as possíveis partições finitas P

$$h(x) = \sup_P h(x,P) \qquad (3)$$

a média ponderada, no espaço dos estados, de $h(x)$ é a entropia de Kolmogorov-Sinai h

$$h = \overline{h(x)} = \int h(x)\, d\mu(x) \qquad (4)$$

No caso de termos um sistema com dependência sensível das condições iniciais, isto é com expoentes de Lyapunov positivos, é de esperar que a maior parte das órbitas irão rapidamente divergir umas das outras e portanto o conjunto $B_t(x)$ vai diminuir muito rapidamente ao longo do tempo, tanto mais depressa quanto mais Lyapunovs positivos houver e quanto maiores eles forem. É pois de esperar que haja uma relação quantitativa entre expoentes de Lyapunov positivos e entropia de Kolmogorov-Sinai. De facto têm-se em geral

$$h \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \qquad (5)$$

e, no caso em que a medida de probabilidade é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, verifica-se a igualdade

$$h = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \qquad (6)$$

É natural que a soma no lado direito das equações (5) e (6) seja apenas sobre os expoentes de Lyapunov positivos porque só estes fazem divergir as órbitas, aumentando a diversidade dos comportamentos dinâmicos no espaço de estados do sistema. A equação (5) é a desigualdade de Ruelle e a equação (6) é a igualdade de Pesin.

Quando os expoentes de Lyapunov são positivos, a divergência das órbitas ao longo do tempo vai gerando cada vez mais informação sobre o exacto valor da condição inicial. Portanto a entropia de Kolmogorov-Sinai mede o valor médio da taxa de produção de informação por unidade de tempo.

Em conclusão: O maior expoente de Lyapunov proporciona uma definição rigorosa de caos e a soma dos Lyapunovs positivos (ou equivalentemente a entropia de Kolmogorov-Sinai) caracteriza a complexidade dinâmica das órbitas do sistema.

MEDIDAS DE COMPLEXIDADE

Antes de tratar do problema de como quantificar a noção (ou as noções) de complexidade, examinemos algumas definições gerais tentadas por alguns autores:

Um objecto (físico ou intelectual) é complexo se contém informação difícil de obter (David Ruelle).

Complexidade é a dificuldade de uma tarefa com significado. Complexidade dum instrumento (máquina, algoritmo,etc.) é a dificuldade da tarefa mais importante associada a esse instrumento. Complexidade de um objecto é a dificuldade de classificar esse objecto e descrever o conjunto a que ele pertence (Peter Grassberger).

Se soubermos classificar todas as possíveis configurações que um sistema assume, usa-se a complexidade da classificação como uma medida da complexidade do sistema. Isto é, um sistema é complexo se o seu comportamento for complexo (Giorgio Parisi).

Um sistema é complexo quando for intrinsecamente difícil de modelizar, sejam quais forem as ferramentas matemáticas utilizadas (R. Badii e A. Politi)

Nestas definições a complexidade aparece associada à informação que se pode extrair do sistema, à dificuldade de extracção dessa informação, à dificuldade das tarefas que o sistema executa, à dificuldade da sua classificação ou da sua modelização, etc. Parece portanto pouco provável que alguma vez seja encontrada uma quantidade que possa descrever todos estes aspectos.

Nesta parte irei fazer uma revisão das principais quantidades que têm sido propostas para caracterizar os diversos aspectos da complexidade dos sistemas. Umas caracterizam a maior ou menor natureza aleatória das configurações do sistema, outras a dificuldade do algoritmo ou o tempo necessário para reproduzir o comportamento do sistema, outras ainda as relações de dependência entre as diversas componentes. São estas últimas sobretudo que tentam caracterizar a criação de estruturas e tanto poderíamos chamar-lhe medidas de complexidade como *medidas de auto-organização.*

Complexidade Algorítmica

[9] [10] As órbitas dinâmicas do sistema, isto é os sucessivos estados por que ele passa à medida que o tempo evolui, definem o comportamento do sistema. Portanto se descrevermos as órbitas, descrevemos o sistema. As órbitas podem ser codificadas por uma sequência de números, números binários por exemplo. Seja S a sequência que descreve a evolução dinâmica do sistema. Seja $M_N(S)$ o comprimento do menor programa que, num certo computador padrão, é capaz de reproduzir os primeiros N símbolos da sequência S. Note-se que em $M_N(S)$ se inclui o tamanho do programa e o tamanho dos dados iniciais que é necessário dar ao programa para gerar a sequência S. Define-se então *complexidade algorítmica* como o limite:

$$C(S) = \lim_{N \to \infty} \frac{M_N(S)}{N} \tag{7}$$

Para que esta noção seja independente do computador particular em que é definida, é essencial tomar o limite $N \to \infty$. Como qualquer computador pode ser simulado num computador universal por um simulador de comprimento finito, o limite $N \to \infty$ não depende do computador usado. A noção não poderia ser definida, dum modo único, para sequências finitas. Esta noção pode ou não ser a mais apropriada para caracterizar a complexidade dos sistemas. Note-se, por exemplo, que ela exige que o programa seja capaz de reproduzir fielmente todo comportamento dinâmico do sistema. Mas se o que mais nos interessar no sistema for a formação de comportamentos globais coerentes, de padrões colectivos, então não nos interessa muito se o programa reproduz ou não todos os pequenos detalhes irrelevantes. Aqui aparece a noção de significado, que está associada a muitas das aplicações dos sistemas complexos. Se a questão do significado for a essencial, como o é por exemplo nos sistemas evolutivos e com capacidades de aprendizagem, então não interessa caracterizar todo o comportamento do sistema, mas sim apenas o que está associado às tarefas com significado.

Dada uma sequência completamente aleatória, a menor descrição da sequência é a própria sequência. Como a sequência não é formada segundo nenhuma lei, não é possível comprimir a informação. Portanto a complexidade algorítmica duma sequência aleatória é máxima e a complexidade algorítmica é de facto uma medida de aleatoriedade, não uma medida de estrutura. Neste sentido o ruído do vento seria mais complexo que a quinta sinfonia de Beethoven.

A noção de complexidade algorítmica aplica-se a cada sequência em particular, enquanto que a noção de entropia de Kolmogorov-Sinai, discutida anteriormente, é uma noção estatística que se aplica ao comportamento médio das órbitas dum sistema dinâmico. As duas noções estão porém relacionadas. Em $M_N(S)$ podemos distinguir duas partes

$$M_N(S) = c_1(N) + c_2 N \tag{8}$$

em que $c_1(N)$ é o comprimento do programa e $c_2 N$ o comprimento dos dados. $c_2 N$ é a parte da informação que não é "explicada" pelo programa. Portanto, em relação ao modelo que o programa representa, c_2N é a componente aleatória do sistema. Em geral é $c_1(N)/N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$ e apenas a componente aleatória contribui para a complexidade algorítmica. Por este motivo, em muitos casos, a complexidade algorítmica das órbitas típicas dum sistema dinâmico coincide com a entropia de Kolmogorov-Sinai.

A noção de complexidade algorítmica é bastante importante em teoria da informação e teoria da computação. Um problema porém, com a definição dada acima, é o de não ser efectivamente computável. Dada uma sequência infinita, de origem desconhecida, nunca poderemos estimar dum modo fiável a sua complexidade algorítmica porque nunca poderemos saber se de facto encontrámos a sua descrição mais curta. Esta dificuldade pode ser obviada, definindo uma regra específica para efectuar a codificação da sequência e definindo a complexidade algorítmica em relação a esse método de codificação. O método de Ziv e Lempel é um dos possíveis [11].

Profundidade Lógica

[12] Aqui não se trata do comprimento do menor programa que descreve a sequência *S*, mas sim do *tempo necessário para correr o menor programa que gera S*. Note-se como esta noção é bastante diferente da complexidade algorítmica. Um estudante de Matemática pode considerar que um livro de teoria dos números ou geometria algébrica é profundo. Porém a complexidade algorítmica do livro é certamente pequena porque todos os teoremas são dedutíveis a partir dum pequeno número de definições iniciais. A profundidade do livro resulta sim do tempo (e da energia) necessários para deduzir todos os teoremas. Mais do que o conteúdo de informação, a profundidade lógica traduz o valor de utilidade da mensagem, na medida em que o facto do livro ter sido escrito evita ao leitor o trabalho de deduzir todos os resultados a partir dos teoremas.

Por outro lado a profundidade lógica duma sequência completamente aleatória é nula, porque sendo a menor descrição da sequência a própria sequência podemos sempre, para cada *N*, construir um computador tal que os primeiros *N* símbolos da sequência sejam obtidos pelo simples carregar dum botão.

Considerar a complexidade algorítmica ou a profundidade lógica para cada sequência em particular, é o ponto de vista habitual em teoria da computação. Um outro ponto de vista consiste em considerar não uma sequência em particular mas o conjunto de todas as sequências dum certo tipo. Então o que interessa caracterizar é a *complexidade do processo* usado para gerar uma sequência típica dentro da respectiva classe. Estes dois pontos de vista conduzem a resultados diferentes. Por exemplo:

As sequências de DNA existentes nos organismos vivos actuais são sequências complexas com muitos aspectos quasi-aleatórios. Portanto a complexidade algorítmica de cada sequência em particular parece elevada e na medida em que a descrição mais curta é semelhante ao seu tamanho a profundidade lógica é pequena. Porém se em vez duma sequência em particular, considerarmos o conjunto de todas as sequências de DNA existentes nos seres vivos actuais, o que se acredita actualmente é que elas são obtidas pela aplicação repetitiva de regras de associação muitos simples, mais algumas mutações, e o resultado é selecionado pela sua adequação ao ambiente. O programa de evolução biológica é bastante simples, mas o produto final, como nós o conhecemos, é o resultado dum processo extremamente longo (~ 10^9 anos). Portanto a profundidade lógica da evolução biológica é elevada. Note-se que ao considerar o conjunto, em vez duma sequência em particular, a complexidade algorítmica elevada que era necessária para especificar a sequência, passou para o ambiente exterior que funciona como um autómato complexo que testa as sequências produzidas por regras simples.

Convém não confundir a noção de profundidade lógica com a *complexidade temporal* que se mede pelo tempo usado pelo programa mais rápido e não pelo programa mais curto. *Complexidade temporal* e *complexidade espacial* são dois conceitos usados em teoria da computação, que constituem os dois aspectos do que se designa por *complexidade computacional*. A complexidade temporal mede-se pelo tempo necessário para efectuar a computação usando o programa mais rápido e a complexidade espacial é o número de bits de memória necessários para efectuar o cálculo. Ao considerar o tempo usado pelo programa mais curto, e não pelo programa mais rápido, a profundidade lógica tenta fazer referência à "verdadeira" origem do processo que gera a complexidade, libertando o modelo de possíveis aspectos redundantes.

Existe, para os sistemas dinâmicos, uma noção semelhante à complexidade espacial. Chama-se *profundidade termodinâmica* [13] [14] e mede o número de graus de liberdade macroscópicos e microscópicos que a especificação de uma trajectória requer. Dada uma trajectória τ e a sua probabilidade àpriori $p(\tau)$, a profundidade termodinâmica da trajectória é

$$D_\tau = - \log p(\tau)$$

Sofisticação

[15] A noção de *sofisticação*, dá ênfase ao comprimento do código e não ao comprimento dos dados que é necessário fornecer ao código para que ele possa ge-

rar a sequência S de tamanho N. Se em (8) o comprimento do código c_1 (N) não depender de N

$$M_N(S) = c_1 + c_2 N \tag{9}$$

então c_1 será a sofisticação.

Consideremos uma sequência gerada por um sistema dinâmico com dependência sensível das condições iniciais, por exemplo

$$x \rightarrow 1 - 2x^2 \tag{10}$$

As sequências geradas por este sistema, a partir da maioria das condições iniciais no intervalo [-1, 1], passam a maior parte dos testes usados para testar números aleatórios. Para cada sequência em particular $M_N(S)$ irá conter um pequeno programa equivalente à Eq. (10) e uma condição inicial longa porque a dependência sensível exige uma grande precisão na especificação da condição inicial. Portanto a complexidade algorítmica é grande mas a sofisticação é pequena.

A sofisticação é uma medida da importância das regras na especificação da sequência de estados do sistema. Neste sentido está associada às correlaçõeses dinâmicas do sistema que gera a sequência de estados, o que é um aspecto importante nos sistemas complexos evolutivos. Porém a sua definição só é útil quando $M_N(S)$ tiver a forma descrita na equação (9). Por exemplo para um simples modelo autoregressivo dependente de k parametros verifica-se que [16]

$$M_N(S) = \frac{1}{2} k \log N + c_2 N \tag{11}$$

e neste caso a sofisticação degeneraria num valor infinito, o que não parece adequado para um sistema relativamente simples.

Excesso de Entropia ou Complexidade de Medida Efectiva

[17] [18] [19] [20] Esta noção e a seguinte aplicam-se não a uma sequência isolada, mas sim a uma distribuição probabilística estacionária de sequências. São ambas definidas utilizando a entropia de Shannon.

Seja $p_N(s_1 \ldots s_N)$ a probabilidade de observar o bloco $s_1 \ldots s_N$ de comprimento N. Então a soma sobre todos os possíveis blocos de comprimento N de

$$H(N) = -\sum_{\{s_i\}} p_N(s_1 \ldots s_N) \log p_N(s_1 \ldots s_N) \tag{12}$$

dá a incerteza média (entropia) dum bloco de comprimento N. A incerteza média por elemento da sequência será

$$h_S = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} H(N) \tag{13}$$

chamada a *entropia de Shannon.*

Suponhamos que as sequências são construidas segundo um certo número de regras deterministas, mas também com um certo grau de aleatoriedade. Então, quanto maiores forem os blocos examinados mais informação podemos extrair sobre as regras deterministas e mais próximo estaremos da verdadeira incerteza por símbolo. A diferença $H(N)/N - h_S$ representa portanto a informação adicional (para além da informação sobre os blocos de dimensão N) que é necessária para revelar a verdadeira entropia de Shannon. O *excesso de entropia* define-se como

$$E = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N} H(N) - h_S \right) \tag{14}$$

No caso de uma sequência duplamente infinita de símbolos mostra-se [20] que o excesso de entropia E é a informação mútua entre as duas metades semi-infinitas da sequência

$$E = I(\overleftarrow{s}, \overrightarrow{s}) = H(\overleftarrow{s}) + H(\overrightarrow{s}) - H(\overleftarrow{s} + \overrightarrow{s}) \tag{15}$$

em que $H(\overleftarrow{s})$, $H(\overrightarrow{s})$ e $H(\overleftarrow{s} + \overrightarrow{s})$ são respectivamente as entropias (Eq.(12)) da metade esquerda, da metade direita e da sequência total. Portanto o excesso de entropia mede a quantidade de informação que uma metade da sequência contém acerca da outra metade. Neste sentido é uma medida da correlação estatística e dá alguma informação sobre a estrutura da sequência.

Complexidade estatística

[18] [21] Consideremos de novo sequências duplamente infinitas e as probabilidades $p(\overrightarrow{s} | \overleftarrow{s_i})$ de observar uma dada configuração $\overrightarrow{s}$ na metade direita uma vez conhecido que a configuração esquerda é $\overleftarrow{s_i}$. As quantidades $p(\overrightarrow{s} | \overleftarrow{s_i})$ chamam-se *probabilidades condicionais.*

Haverá provavelmente todo um conjunto de configurações esquerdas para as quais as probabilidades condicionais são as mesmas. Vamos agrupar configurações equivalentes $\overleftarrow{s_i}$ num conjunto designado por S_i. A cada um destes conjuntos chama-se um *estado causal.* À quantidade

$$C = -\sum_{\{s_i\}} p(S_i) \log p(S_i) \tag{16}$$

em que $p(S_i)$ é a probabilidade de ocorrência de uma configuração esquerda no conjunto S_i, dá-se o nome de *complexidade estatística*. Uma vez estabelecidas as probabilidades condicionais $p(\overrightarrow{s} | \overleftarrow{s_i})$, e dado o conhecimento da metade esquerda, é possível usar as probabilidades condicionais para fazer uma previsão estatística da configuração direita. Portanto a complexidade estatística mede a quantidade média de informação acerca das configurações esquerdas que é necessária para poder fazer uma previsão óptima do lado direito. Por este motivo quantidades deste tipo têm sido chamadas *complexidades de previsão* [18].

A complexidade estatística está relacionada com o excesso de entropia através da desigualdade

$$E \leq C \tag{17}$$

a qual significa que para uma previsão ideal dum acontecimento a partir de outro é necessária uma informação (uma memória) pelo menos igual à informação mútua entre os dois acontecimentos.

Complexidade gramatical Reconstrução do autómato

Uma outra noção procura, na sequência S que descreve o sistema, quais as regras da sua formação, isto é a respectiva gramática. A complexidade do sistema é então associada à *complexidade da gramática* de acordo com a hierarquia de Chomsky: linguagens regulares, linguagens livres do contexto, linguagens sensíveis ao contexto, conjuntos recursivamente enumeráveis [22].

A cada tipo de linguagem na hierarquia de Chomsky está associado um tipo de autómato que a reconhece, no sentido em que palavras que pertencem à linguagem correspondem a percursos válidos sobre o grafo do autómato. Nomeadamente a linguagens regulares correspondem autómatos finitos, a linguagens livres do contexto autómatos *push-down*, a linguagens dependentes do contexto autómatos limitados linearmente e finalmente às linguagens mais gerais correspondem máquinas de Turing universais. Portanto a identificação da gramática gerada por um sistema complexo é equivalente à *reconstrução do autómato* que reproduz o seu comportamento.

A complexidade gramatical tem duas componentes. A primeira identifica a classe de linguagens do autómato mínimo que reproduz o comportamento do sistema. A segunda caracteriza a complexidade do autómato mínimo dentro da sua classe. Por exemplo se o autómato identificado for finito, esta poderia ser

$$C_{RL} = \log N$$

em que N é o número de nodos do autómato. A C_{RL} chama-se *complexidade de linguagem regular*. Também se podem considerar as probabilidades p_i com que os diversos nodos do autómato são visitados e definir

$$C_{SC} = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$$

chamada a *complexidade de conjunto*.

Se a linguagem gerada não for uma linguagem regular, já não corresponde a um autómato finito. Nesse caso pode considerar-se o menor número $n(L)$ de palavras necessárias para construir todas as subsequências até ao comprimento L e definir a *complexidade gramatical* como

$$C_G = \lim_{L \to \infty} \sup \, n(L) / L$$

Auto-organização dinâmica

[28] Vimos anteriormente que a soma dos expoentes de Lyapunov positivos é uma medida da complexidade dinâmica da evolução temporal do sistema. Designemos essa soma por h. Se considerarmos o sistema dinâmico como constituído por N partes, podemos associar a cada uma das divisões em dois blocos de uma e N-1 partes os respectivos expoentes parciais (chamados expoentes de Lyapunov condicionais). Designemos as somas dos expoentes condicionais por h_1 e h_{N-1}. A diferença

$$h_1 + h_{N-1} - h \tag{18}$$

é uma grandeza dinâmica com um significado análogo ao da informação mútua em teoria da informação. Representa a diferença dinâmica entre o sistema global e a simples justaposição das suas partes sem interacções mútuas.

Somando as quantidades representadas em (18), para todas as possíveis decomposições em uma e N-1 partes, obtém-se uma *medida da auto-organização dinâmica*

$$I = \sum_{k=1}^{N} \left(h_1^{(k)} + h_{N-1}^{(k)} - h \right) \tag{19}$$

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DA COMPLEXIDADE AUTO-SEMELHANÇA E AUTO-DIFERENÇA

Os sistemas naturais que, pela maior parte dos critérios descritos anteriormente seriam considerados os mais complexos, são sistemas que não estão isolados (no sentido termodinâmico) mas através dos quais uma certa forma de energia flui ou então que resultaram de um longo processo de evolução ou agregação. No caso dos sistemas que necessitam para a sua manutenção de um fluxo contínuo de energia, uma parte das suas estruturas e a sua geometria são apenas um resultado das necessidades físicas inerentes à manutenção do fluxo de energia. Por exemplo: os sistemas cardiovasculares, os sistemas respiratórios, os sistemas vasculares das plantas e os sistemas traquiais dos insectos todos exibem uma estrutura ramificada, cuja escala varia com a potencia três quartos do tamanho do corpo (Fig6). Esta lei de potencia é obedecida com grande precisão para tamanhos corporais num domínio de 20 ordens de grandeza, desde os organismos unicelulares até às baleias azuis. De facto esta lei resulta de três factos simples[29]:

1- Uma estrutura ramificada é necessária para fornecer, a todas as partes do organismo, os fluidos que transportam a energia que mantém a vida;

2- As ramificações finais (os capilares) têm sensivelmente o mesmo tamanho independentemente do tamanho do corpo;

3- A energia necessária para o transporte é a mínima possível.

Estes sistemas circulatórios com as suas ramificações sucessivas e uma estrutura arborescente têm o mesmo tipo de propriedade de auto-semelhança que muitos outros objectos do mundo natural. Diz-se que um objecto é auto-semelhante quando cada uma das suas partes, quando convenientemente amplificada é identica ao objecto global. Esta propriedade pode repetir-se sucessivamente até escalas extremamente pequenas.

Embora esta forma de organização hierárquica em estruturas auto-semelhantes seja bastante frequente por exemplo em objectos que resultam dum processo de agregação, ela pode ou não ser considerada uma marca da complexidade, conforme o ponto de vista. A repetição da mesma estrutura a escalas cada vez menores dá aos objectos auto-semelhantes uma riqueza infinita de detalhe e, por exemplo, numa imagem a descrição completa do objecto exigiria uma resolução infinita e portanto um número infinito de *bits*. Porém tais objectos podem ser construidos a partir de uma lei simples e a sua descrição comprimida (o programa) é muito curta. Para os construir completamente é que seria necessário um tempo infinito. Portanto os sistemas auto-semelhantes são muito simples ou muito complexos, tudo depende do ponto de vista.

Em sistemas vivos algumas das estruturas, como o sistema circulatório, são auto-semelhantes mas muitas outras estruturas espaciais e temporais diferem bastante quando se varia a escala. São disto exemplo a distribuição de biomassa no corpo dos animais, a densidade de espécies na floresta tropical, a densidade de capital numa economia, etc. Embora distintas, estas diversas estruturas não são independentes nem arbitrárias, no sentido em que alterações ao nível de uma delas afecta em geral todas as outras. Estas observações e a noção de que os seres vivos são um exemplo de sistema complexo, levou Wolpert e Macready [30] a sugerir recentemente como medida de complexidade não a semelhança mas sim a *auto-diferença* entre estruturas dum mesmo sistema a diversas escalas. A auto-diferença entre duas escalas é quantificada através da quantidade de informação adicional que é necessária para descrever a estrutura duma escala, para além da informação já existente na outra.

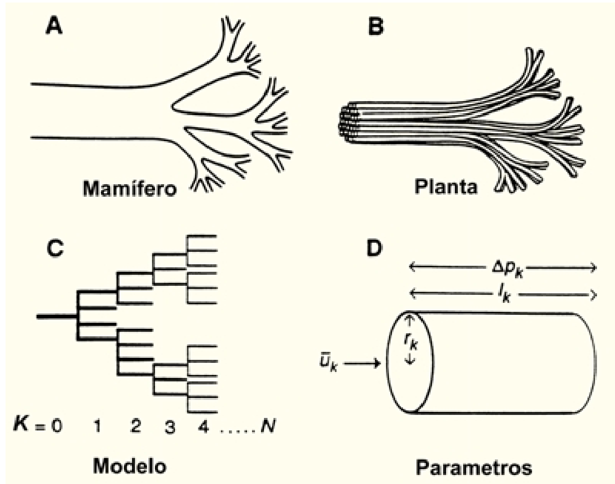

Fig. 6 - Representação esquemática de redes biológicas de distribuição : (**A**) Sistemas circulatório e respiratório em mamíferos (**B**) Sistema vascular em plantas (**C**) Representação topológica dos sistemas, em que a ordem (*K*) dos diferentes níveis começa em zero (aorta) e vai até *N* (capilares) (D) parâmetros dum elemento típico do nivél K (reproduzido da ref. [29]).

CONCLUSÃO

Ao longo deste texto tentou-se uma caracterização da noção de complexidade. Uma conclusão é a de que esta noção está associada ou à imprevisibilidade, ou à dificuldade de modelização, ou à dificuldade de reprodução do comportamento dum sistema. Em qualquer dos casos, ao classificar um sistema como complexo, isso só importa ao observador. Nada se altera no sistema pelo facto de nós o classificarmos como complexo ou não complexo. Portanto a questão que se põe é: Porquê e para quê caracterizar a complexidade?

A resposta tem dois aspectos. O primeiro é que a caracterização da complexidade faz parte do processo de conhecimento do observador. Criação de modelos é compressão da informação recebida e todos os seres com capacidade cognitiva o fazem, até as formigas [31]. Se os dados da experiencia sensível não forem comprimidos ou não forem compressíveis, nada é aprendido. Se os dados não possuirem uma regularidade perceptível, a sua descrição não lhes acrescenta qualquer valor.

O segundo aspecto é que a criação de modelos e a caracterização do comportamento dos sistemas tem, para o observador, um valor preditivo que lhe facilita a adaptação ao ambiente que o rodeia. Em casos favoráveis permitir-lhe-á mesmo actuar sobre os sistemas e controlá-los para seu proveito.

Uma outra questão que transcende a caracterização da complexidade e tem ainda maior importancia é a seguinte:

Suponhamos que se observa um sistema complexo com uma hierarquia de estruturas em interacção. Como é que se chegou até lá? Isto é, como é que se cria a complexidade? Por exemplo, qual foi a dinâmica que a partir de uma natureza amorfa (do nosso ponto de vista como observadores) criou estruturas aparentemente tão complexas como os seres vivos? Como e porquê seres unicelulares se associaram em seres com orgãos diferenciados e cooperativos?

Se questões biológicas como estas podem parecer académicas para o cidadão comum, elas deixam de o ser quando transportadas para os superorganismos que são as sociedades ou os países. A evolução biológica é controlada pelo mecanismo de selecção e, à posteriori, tudo parece correr bem, uma vez que sobrevivem as espécies mais viáveis. Mas será que isso serve de consolo às espécies inviáveis que vão ser eliminadas? E os nossos superorganismos sociais são viáveis ou inviáveis?

Quando as escalas de tempo associadas às diversas estruturas dum organismo ou superorganismo são muito diferentes, pode haver um conflito entre os mecanismos adaptativos das diversas escalas. Por exemplo: Na Terra parece só haver três espécies em que os indivíduos dominantes dum grupo atacam e aniquilam, episódica mas sistemáticamente, os indivíduos de outros grupos da mesma espécie. São os chimpanzés, os gorilas e os homens. Todos genéticamente próximos. Uma vez que estas três espécies sobreviveram até agora, é evidente que este comportamento deve ter um valor adaptativo. Mas tê-lo-á também depois dos pequenos grupos se associarem nos superorganismos que são as nações ou as unidades políticas?

Na evolução biológica mede-se em geral a robustez, duma espécie ou dum indivíduo dentro de uma espécie, pela sua capacidade reprodutiva, isto é, pela transmissão dos seus genes às gerações futuras. Na maior parte dos grupos animais são os indivíduos dominantes que mais transmitem os seus genes e a luta pelo domínio dentro do grupo parece ter um propósito reprodutivo. Neste sentido a luta pelo domínio dentro do grupo tem um valor adaptativo. Nas sociedades humanas actuais continua a haver uma apetência enorme pelo poder e pelo domínio, mas não são os indivíduos, nem os grupos, com maior domínio que mais se reproduzem. Será que a este nível se alterou o paradigma e o valor adaptativo é outro? Será que os novos "genes" a transmitir são os valores culturais? Ou será que há apenas um malentendido com um mecanismo herdado de outra escala? Ou um conflito entre dois mecanismos que actuam simultaneamente, mas cujos valores adaptativos pertencem a escalas diferentes?

É a estas e outras questões que é urgente responder. A alternativa é continuar como sonâmbulos através da história [32] e esperar que a selecção natural nos diga (ou diga a quem quer que ocupe o nosso nicho ecológico) se somos ou não viáveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] H. G. Schuster; *Deterministic Chaos, An Introduction*, VCH, Weinheim 1995.

[2] *Complexity in Physics and Technology*, M. S. Garrido e R. Vilela Mendes (Eds.), World Scientific 1992.

[3] R. Badii e A. Politi; *Complexity. Hierarchical Structures and Scaling in Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997.

[4] P. Schuster; *How does Complexity Arise in Evolution*, Santa Fe Institute working paper 96-05-026.

[5] *Machiavellian Intelligence: Social Expertise and the Evolution of Intellect in Monkeys, Apes and Humans*; R. Byrne e A. Whiten (Eds.), Clarendon 1988.

[6] P. W. Anderson; *The Eightfold Way to the Theory of Complexity: A Prologue*, in *Complexity: Metaphors, Models and Reality*; G. A. Cowan, D. Pines e D. Metzer (Eds.), Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, vol. XIX, pag. 7, Addison-Wesley 1994.

[7] Y. I. Manin; *Mathematics as Metaphor*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Kyoto 1990, pag. 1665.

[8] R. Vilela Mendes; *A Matemática da Complexidade*, em *Matemática e Cultura II*, Centro Nacional de Cultura SBP Editores, Lisboa 1995.

[9] M. Li e P. Vitányi; *An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications*, Springer 2nd edition 1997.

[10] G. J. Chaitin; *Information, Randomness and Incompleteness*, World Scientific 1990.

[11] J. Ziv e A. Lempel; *Compression of Individual Sequences via Variable-rate Coding*, IEEE Trans. Inf. Theory 24, 530 (1978).

[12] C. H. Bennett; *Dissipation, Information, Computational Complexity and the Definition of Organization*, in *Emergent Syntheses in Science*, D. Pines (Ed.), SFI Studies in the Sciences of Complexity vol. 1, pag. 297, Addison-Wesley 1987.

[13] S. Lloyd e H. Pagels; *Complexity as Thermodynamic Depth*, Ann. of Phys. 188 (1988) 186.

[14] S. Lloyd e H. Pagels; *Existence and Uniqueness of Physical Measures of Complexity*, preprint CALT-68-1576.

[15] M. Koppel; *Complexity, Depth and Sophistication*, Complex Systems 1, 1087 (1987).

[16] J. Rissanen; *Universal Coding, Information, Prediction and Estimation*, IEEE Trans. Inform. Theory 30, 629 (1984).

[17] P. Grassberger; *Towards a Quantitative Theory of Self-Generated Complexity*, Int. J. of Theor. Physics, 25 (1986) 907.

[18] P. Grassberger; *Problems in Quantifying Self-Generated Complexity*, Helvetica Physica Acta 62 (1989) 489.

[19] J. P. Crutchfield e K. Young; *Inferring Statistical Complexity*, Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 105.

[20] J. P. Crutchfield e K. Young; *Computation at the Edge of Chaos*, in *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, pag. 223, SFI Studies in the Sciences of Complexity, vol. VIII, W. H. Zurek (Ed.), Addison-Wesley 1990.

[21] J. P. Crutchfield e D. P. Feldman; *Statistical Complexity of Simple One-dimensional Spin Systems*, Phys. Rev. E55 (1997) R1239.

[22] R. N. Moll, M. A. Arbib e A. J. Kfoury; *An Introduction to Formal Language Theory*, Springer 1988.

[23] C. De W. Van Siclen; *Information Entropy of Complex Structures*, Phys. Rev. E56 (1997) 5211.

[24] Y.-C. Zhang; *Complexity and 1/f Noise. A Phase Space Approach*, J. Phys. I France 1 (1991) 971.

[25] D. F. Felman e J. P. Crutchfield; *Measures of Statistical Complexity: Why ?*, SFI working paper 97-07-064.

[26] S. Pincus; *Approximate Entropy as a Complexity Measure*, Chaos 5 (1995) 110.

[27] *Measures of complexity*, L. Peliti e A. Vulpiani (Eds.), Springer 1988.

[28] R. Vilela Mendes; *Conditional exponents, entropies and a measure of dynamical selforganization*, adap-org/9802001 (at xxx.lanl.gov).

[29] G. B. West, J. H. Brown e B. J. Enquist; *A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology*, Science, 276 (1997) 122.

[30] D. H. Wolpert e W. G. Macready; *Self-Dissimilarity: An Empirical Measure of Complexity*, SFI working paper 97-12-087.

[31] Zh. I. Reznikova e B. Ya. Ryabko; *Problems Inf. Transmission 22* (1986) 245.

[32] *State of the World 1996, A Worldwatch Institute Report on Progress Towards a Sustainable Society*, W. W. Norton, London 1996.