Introdução à analise estocástica e aplicações

Soluções dos exercícios

March 4, 2010

Exercícios

1 - *Numa caixa existem quatro bilhetes em que está escrito, respectivamente, AAB, ABA, BAA, BBB. Escolhe-se um bilhete ao acaso. Considere os seguintes acontecimentos E1={A aparece em primeiro}, E2={A aparece em segundo}, E3={A aparece em terceiro lugar}. Mostre que estes acontecimentos são independentes dois a dois mas não são globalmente independentes.*

Solução:

$$p\left(E1\right)=\frac{1}{2};p\left(E2\right)=\frac{1}{2};p\left(E3\right)=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} p\left(E1\cap E2\right) &= \frac{1}{4}=p\left(E1\right)p\left(E2\right) \\ p\left(E1\cap E3\right) &= \frac{1}{4}=p\left(E1\right)p\left(E3\right) \\ p\left(E2\cap E3\right) &= \frac{1}{4}=p\left(E2\right)p\left(E3\right) \end{aligned}$$

mas $$p\left(E1\cap E2\cap E3\right)=0\neq p\left(E1\right)p\left(E2\right)p\left(E3\right)=\frac{1}{8}$$

2 - *Uma doença ocorre em* 2 *de cada* 10000 *habitantes* $(p_0(A) = 0,0002; p_0(B) = 0,9998)$. *Existe um teste com fiabilidade* $99,5\%$, *mas com* 2 *falsos positivos em cada* 1000 *casos saudáveis* $(p(x|A) = 0,995; p(x|B) = 0,002)$.
Se um indivíduo tiver um teste positivo, qual é a probabilidade de efectivamente ter a doença ?

Solução:

$$p(A|x) = \frac{p(x \cap A)}{p(x)} = \frac{p(x|A)\,p(A)}{p(x|A)\,p(A) + p(x|B)\,p(B)}$$

$$p(A|x) = \frac{0,995 \times 0,0002}{0,995 \times 0,0002 + 0,002 \times 0,9998} = 0,09$$

3 - *Admita-se que cerca de* $1,5\%$ *dos atletas de alta competição recorre a estimulantes* $(p_0(A) = 0,015; p_0(B) = 0,985)$. *Considere-se um tipo de análise que obtém resultados positivos em* 99% *dos casos e tem falsos positivos em* 4% *dos casos* $(p(x|A) = 0,99; p(x|B) = 0,04)$

a) Qual a probabilidade de um atleta com teste positivo se ter efectivamente drogado ?

b) No caso de se repetir o teste e ele dar de novo positivo qual é então a probabilidade de ele se ter drogado ?

$\left(p(xx|A) = p(x|A)^2; p(xx|B) = p(x|B)^2\right)$

Solução:

a) $$p\,(A|x) = \frac{0{,}99 \times 0{,}015}{0{,}99 \times 0.015 + 0{,}04 \times 0{,}985} = 0,27$$

b) $$p\,(A|xx) = \frac{(0{,}99)^2 \times 0{,}015}{(0{,}99)^2 \times 0.015 + (0{,}04)^2 \times 0{,}985} = 0,9$$

Exercícios

4 - *Há uma variável aleatória* X *que pode tomar os valores* $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. *Esta variável é amostrada* 100000 *vezes e no final a média* $\left(\frac{1}{100000}\sum_{i=1}^{100000} X_i\right)$ *foi* $3,83462$. *O número de vezes que se obteve* 2 *foi* 13742. *Qual é a melhor estimativa para o número de vezes que se obteve* 1*?*

Solução: $p(2) = (13742)/(100000) = 0,13742$

$$\begin{aligned} p(1) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) &= 1 - 0,13742 = 0,86258 \quad (1) \\ p(1) + 3p(3) + 4p(4) + 5p(5) + 6p(6) &= 3,83462 - 2p(2) = 3,55978 \end{aligned}$$

Maximizar $\Gamma = \sum_k k\{-p(k)\log p(k) + \lambda_1 p(k) + \lambda_2 k p(k)\}$ sendo $k = 1, 3, 4, 5, 6$

$$p(k) = \exp\{\lambda_1 - 1 + \lambda_2 k\}$$

com λ_1 e λ_2 obtidos a partir das condições (1)

$$x = \exp\{\lambda_2\}; y = \exp(1 - \lambda_1)$$

Exercícios

$$\begin{aligned} x + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 &= \frac{3,55978}{0,86258}\left(x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right) \\ y &= \frac{1}{0,86258}\left(x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right) \end{aligned}$$

$$x = 1,1226235 \qquad y = 9,170822269$$

$$p\left(1\right) = \frac{x}{y} = 0,122412$$

$$p\left(1\right) \times 100000 = 12241 \text{ vezes}$$

Exercícios

5 - *Uma variável x pode tomar 4 posições diferentes $(1, 2, 3, 4)$ ao longo dum circulo (Exemplos: direcções de navegação dum submarino, direcções de deslocação dum cardume, posições dum camião de entrega de mercadorias, etc.). Em cada intervalo de tempo a probabilidade de se deslocar para a frente ou para trás é p e de ficar no mesmo lugar é q $(q + 2p = 1)$.*

a) Calcule a probabilidade de se encontrar em 3 ao fim de dez unidades de tempo se o ponto inicial for 1.

b) Determine uma formula geral para essa probabilidade de transição em n unidades de tempo.

c) Determine o limite dessa probabilidade quando $n \to \infty$

Solução:

$$P = \begin{pmatrix} 1-2p & p & & p \\ p & 1-2p & p & \\ & p & 1-2p & p \\ p & & p & 1-2p \end{pmatrix}$$

Exercícios

A seguinte matrix ortogonal

$$V = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

diagonaliza P

$$VPV^* = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-4p \end{pmatrix}$$

a) $\left(P^{10}\right)_{13} = \left(V^* D^{10} V\right)_{13} = \frac{1}{4}\left(1-4p\right)^{10} - \frac{1}{2}\left(1-2p\right)^{10} + \frac{1}{4}$
b) $\left(P^n\right)_{13} = \left(V^* D^n V\right)_{13} = \frac{1}{4}\left(1-4p\right)^n - \frac{1}{2}\left(1-2p\right)^n + \frac{1}{4}$
c) $\lim_{n\to\infty}\left(P^n\right)_{13} = \frac{1}{4}$

6 - *Em* $t = 0$, *um milhão de organismos é distribuido uniformemente numa área de um kilómetro quadrado. A sua taxas de morte e reprodução são iguais* $(\lambda = \mu)$. *Ao fim de um tempo* T *escolhe-se ao acaso uma área de um metro quadrado. Qual é a probabilidade de aí encontrar um organismo vivo?*

Solução: Em $t = 0$ temos em média um organismo em cada célula de um metro quadrado. Portanto, como o processo é critico $(\lambda = \mu)$, ao fim do tempo T, o número de células ocupadas é igual ao número de famílias sobreviventes. Donde

$$p = \frac{10^6}{1 + \mu T} 10^{-6} = \frac{1}{1 + \mu T}$$

7 - *Verificar que*

$$F_2\left(t\right) = B_t^2 - t$$

é uma martingale

Solução: Seja $\Delta B(t_2) = B\left(t_2\right) - B\left(t_1\right)$

$$\begin{aligned} E\left[B(t_2)^2 \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] &= E\left[\left(B(t_1) + \Delta B(t_2)\right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] \\ &= E\left[B(t_1)^2 + 2B(t_1)\Delta B(t_2) + \Delta B(t_2)^2 \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] \\ &= B(t_1)^2 + 2B(t_1)\cdot 0 + E[\Delta B(t_2)^2 \mid \mathcal{F}_{t_1}] + 0 \\ &= B(t_1)^2 + t_2 - t_1\ . \end{aligned}$$

Donde

$$E\left[B(t_2)^2 - t_2 \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] = B(t_1)^2 - t_1$$

Exercícios

8 - *Verificar que*

$$X_t = X_0 e^{\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t}$$

é a solução de

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

Solução: Aplicando a formula de Ito

$$\begin{aligned} dX_t &= d\left(X_0 e^{\sigma B(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t}\right) = X\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + X\sigma dB(t) + X\frac{\sigma^2}{2} dt \\ &= X_t \mu dt + X_t \sigma dB(t) \end{aligned}$$

9 - *Prove a formula de correspondência "call-put" para opções europeias*

$$V_{put}\left(S,t\right)=V_{call}\left(S,t\right)-S\left(t\right)+e^{-\mu\left(T-t\right)}K$$

Solução: Forma-se o seguinte portfólio no tempo t

$$\Pi\left(t\right)=S\left(t\right)+V_{put}\left(S,t\right)-V_{call}\left(S,t\right)$$

O seu valor em T será

$$S\left(T\right)+\max\left(K-S\left(T\right),0\right)-\max\left(S\left(T\right)-K,0\right)=K$$

Portanto é um produto sem risco com o valor K em todos os casos.
Portanto, usando um argumento de ausência de arbitragem

$$\Pi\left(t\right)=e^{-\mu\left(T-t\right)}K$$

Substituindo na definição de $\Pi\left(t\right)$ obtém-se

$$V_{put}\left(S,t\right)=V_{call}\left(S,t\right)-S\left(t\right)+e^{-\mu\left(T-t\right)}K$$

Exercícios

10 - *Um investidor quer especular na possível subida do preço duma acção. O preço actual é 29 euros e um "call" de três meses sobre esta acção, com um preço de exercício de 30 euros, custa 2,9 euros. O investidor tem 5800 euros para investir. O investidor vai escolher uma de duas estratégias: ou investir todo o seu capital em acções (A) ou em "calls" (B). Calcule os lucros ou prejuizos do investidor para as estratégias A e B e para os dois cenários seguintes: O valor das acções daqui a três meses é: 35 euros (C1); o valor das acções daqui a três meses é 25 euros.*

Solução:

- Estratégia (A): O investidor compra 5800/29=200 acções. Se as acções subirem para 35 euros (C1) o lucro será 1200. Se descerem para 25 (C2) o prejuízo será 800.
- Estratégia (B): O investidor compra 5800/2,9=2000 calls. Se as acções subirem para 35 euros (C1) o lucro será $2000 \times (35 - 30) - 5800 = 4200$ Se o preço descer para 25 (C2), todo o investimento (5800) será perdido. A estratégia B proporciona maiores lucros, mas também maiores perdas.