O poder da matemática ou A matemática como metáfora

Rui Vilela Mendes
CMAF, ICC, CFN

Soluções dos TPC' s

Curso no Mestrado de Complexidade, ISCTE, Inverno 2007

- TPC 1

  Dados

  (1) $I(p)=I(p_1,p_2,\ldots,p_N)$

  (2) $I(1/N\ ,\ 1/N\ ,\ \ldots,\ 1/N) \leq I(p)$

  (3) $I(p_1,p_2,\ldots,p_N) = I(p_1,p_2,\ldots,p_N,0)$

  (4') $I(P)=I(p)+I(q)$ para acontecimentos independentes

- Mostrar que

  $$I_\beta(p) = (1/(\beta-1)) \log \sum_i (p_i)^\beta$$

  é solução de (1)+(2)+(3)+(4') e que

  $$\lim_{\beta\to 1} I_\beta(p) = I(p)$$

- (1) e (3) são consequência imediata da definição de $I_\beta(p)$
- Uma função com segunda derivada não negativa é convexa

$$\frac{\partial^2 I_\beta}{\partial p_i^2} = \beta (p_i)^{\beta-2} \geq 0$$

- Mínimo de $I_\beta(p)$ com $\sum_i p_i = 1$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{1}{\beta-1}\sum_i (p_i)^\beta + \lambda \sum_i p_i\right) = 0 \quad \rightarrow \quad p_i = \left(-\frac{\lambda(\beta-1)}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$$

- Usando $\sum_i p_i = 1$ obtém-se

$$p_i = \frac{1}{N}$$

- Portanto (2) também é satisfeito
- (4') $P_{ik} = p_i\, q_k$

$$I_\beta(P) = \frac{1}{\beta-1}\log\sum_{i,k}(p_i q_k)^\beta = \frac{1}{\beta-1}\left\{\log\sum_i (p_i)^\beta + \log\sum_k (q_k)^\beta\right\}$$

$$I_\beta(P) = I_\beta(p) + I_\beta(q)$$

- Limite $\beta \to 1$

  $\varepsilon = \beta - 1$

$$\sum_{i=1}^N p_i^{1+\varepsilon} = \sum_{i=1}^N p_i \exp\left(\varepsilon \log p_i\right) \cong \sum_{i=1}^N p_i\left(1 + \varepsilon \log p_i\right) = 1 + \varepsilon\sum_{i=1}^N p_i \log p_i$$

$$\lim_{\beta\to 1} I_\beta(p) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\log\left(1 + \varepsilon\sum_{i=1}^N p_i \log p_i\right) = \sum_{i=1}^N p_i \log p_i = I(p)$$

- **TPC 2 :**
  A média foi 4 e o dois saiu 13077 vezes em 100000 lançamentos.
  Quantas vezes saiu o um ?

- $p_2 = (13077)/(100000) = 0,13077$
- (a) $p_1 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 - 0,13077 = 0,86923$
- (b) $p_1 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 = 4 - 0,26154 = 3,73846$
- Maximizar $\Gamma = \sum_k \{- p_k \log p_k + \lambda_1 p_k + \lambda_2 k\, p_k\}$ sendo $k=1,3,4,5,6$
- $p_k = \exp\{\lambda_1 - 1 + \lambda_2 k\}$ com λ_1 e λ_2 obtidos a partir de (a) e (b)
- $x = \exp\{\lambda_2\} = 1,20091$
- $p_1 = 0,86923/(1+x^2+x^3+x^4+x^5) = 0.09932$
- $p_1 \times 100000 = 9932$ vezes

- **TPC 3 :** Aplique o teorema de Bayes a um exemplo no seu domínio de actividade
- Teorema de Bayes
  $p(A,x)=p(A|x)p(x)=p(x|A)p_0(A)$
  $p(x) = p(x|A)p_0(A)+ p(x|B)p_0(B)$

$$p(A \mid x) = \frac{p(x \mid A)\, p_0(A)}{p(x \mid A)p_0(A) + p(x \mid B)p_0(B)}$$

- Alguns exemplos apresentados pelos alunos do curso
- (1) Uma doença ocorre em 1 para cada 10000 habitantes $\rightarrow p_0(A)=0{,}0001$; $p_0(B)=0{,}9999$
  Existe um teste com fiabilidade 99,9%, mas com 2 falsos positivos em cada 1000 casos saudáveis $\rightarrow p(x|A)=0{,}999$; $p(x|B)=0{,}002$
  Se um indivíduo tiver um teste positivo, qual é a probabilidade de efectivamente ter a doença ?

$$p(A \mid x) = \frac{0{,}999 \times 0{,}0001}{0{,}999 \times 0{,}0001 + 0{,}002 \times 0{,}9999} = 0{,}0476$$

- (2) Cerca de 1% dos atletas de alta competição recorre a estimulantes
  $p_0(A)=0{,}01$; $p_0(B)=0{,}99$
  Considere-se um tipo de análise que obtém resultados positivos em 99% dos casos e tem falsos positivos em 5% dos casos
  $p(x|A)=0{,}99$; $p(x|B)=0{,}05$
  Qual a probabilidade de um atleta com teste positivo se ter efectivamente dopado ?

$$p(A \mid x) = \frac{0{,}99 \times 0{,}01}{0{,}99 \times 0{,}01 + 0{,}05 \times 0{,}99} = 0{,}167$$

- No caso de se repetir o teste e ele dar de novo positivo temos :
  $p(xx|A)=p(x|A)^2=0{,}9801$; $p(xx|B)=p(x|B)^2=0{,}0025$
  Donde :

$$p(A \mid x) = \frac{0{,}9801 \times 0{,}01}{0{,}9801 \times 0{,}01 + 0{,}0025 \times 0{,}99} = 0{,}798$$

- TPC 4:
- Uma lebre vai a fugir dum galgo numa planície. Chega à beira de uma colina e tem duas escolhas:

  1- Continuar a correr na planície ou

  2- Correr colina acima
- A lebre, que não sabe matemática, faz a má escolha e é apanhada pelo galgo
- Se soubesse matemática qual era a escolha que faria ?

- *Consideremos um animal de dimensão linear L*
- Sendo o rendimento dos musculos ≈25%, a potência útil desenvolvida por um animal em esforço depende da dissipação de calor.
  A dissipação de calor é proporcional à superfície do corpo ≈ L^2
  Portanto a potência útil é ≈ L^2
- A velocidade dum animal a correr em terreno plano é limitada pela resistência do ar. A resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade e à area transversal ≈ v^2L^2. Portanto a potência necessária é ≈ v^3L^2
- Igualando a potência útil desenvolvida e a potência necessária conclui-se que a velocidade de corrida em plano é sensivelmente a mesma para todos os animais com estruturas físicas homólogas.
- Porém para subir uma encosta a potência necessária é ≈ $v\ L^3$
  Portanto para subir uma encosta a velocidade é ≈ L^{-1}
- Conclusão : A lebre devia escolher a colina para fugir.

- TPC 5
  Determine as dimensões fractais da curva de Koch e do conjunto ternário de Cantor

- Dimensão fractal

$$N_n = \frac{C}{(a_n)^{d_F}}$$

N_n = número de caixas necessárias para cobrir a figura no passo n
a_n = dimensão das caixas no passo n

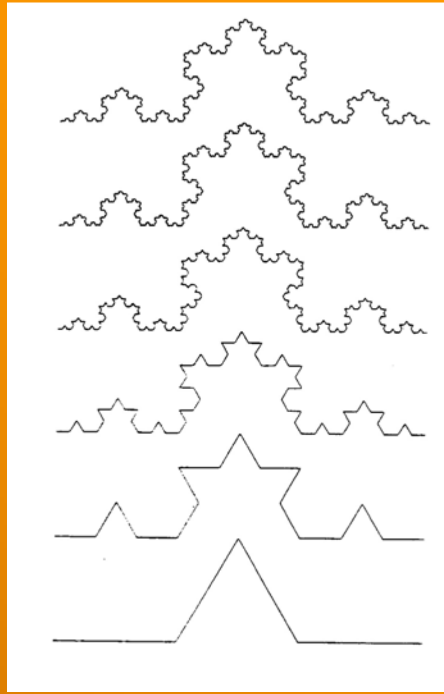
- Portanto

$$\log N_n = \log C + d_F \log \frac{1}{a_n}$$

- Donde

$$d_F = \lim_{n \to \infty} \frac{\log N_n}{\log \frac{1}{a_n}}$$

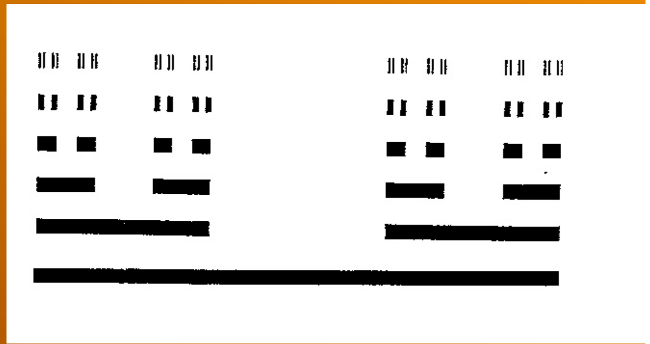
- A curva de Koch



$$N_n = 4^n \qquad a_n = \frac{1}{3^n}$$

$$d_F = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_n}{\log \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = 1{,}2618$$

- O conjunto ternário de Cantor



$$N_n = 2^n \qquad a_n = \frac{1}{3^n}$$

$$d_F = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_n}{\log \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = 0{,}63$$

TPC 6

- Quais são os geradores do grupo de simetrias do triângulo (D3)?
- Quantos elementos tem?
- Construa o diagrama de Cayley para o grupo de simetria do triângulo (isto é o diagrama das relações de parentesco dos Malekula)

- O grupo D3 tem 6 elementos
- Dois geradores :
  m= rotação de 120 º
  f = reflexão

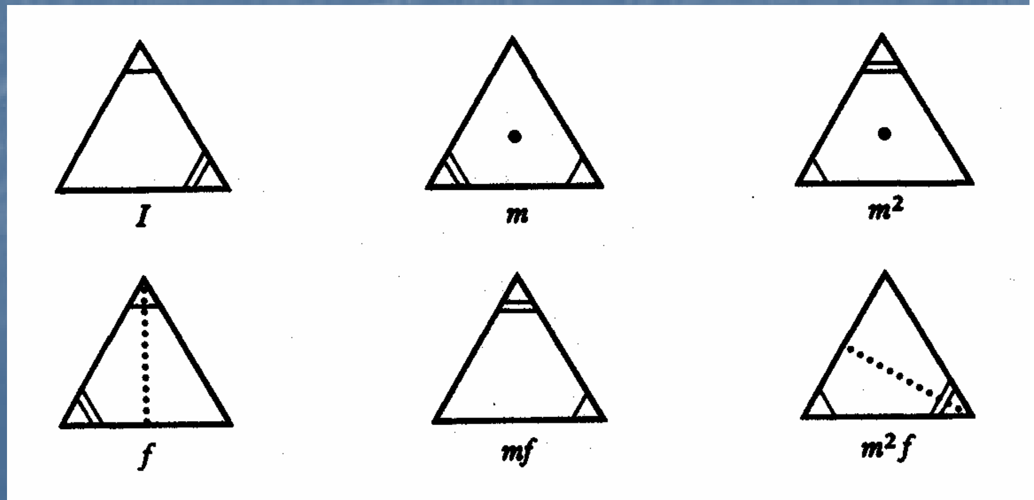
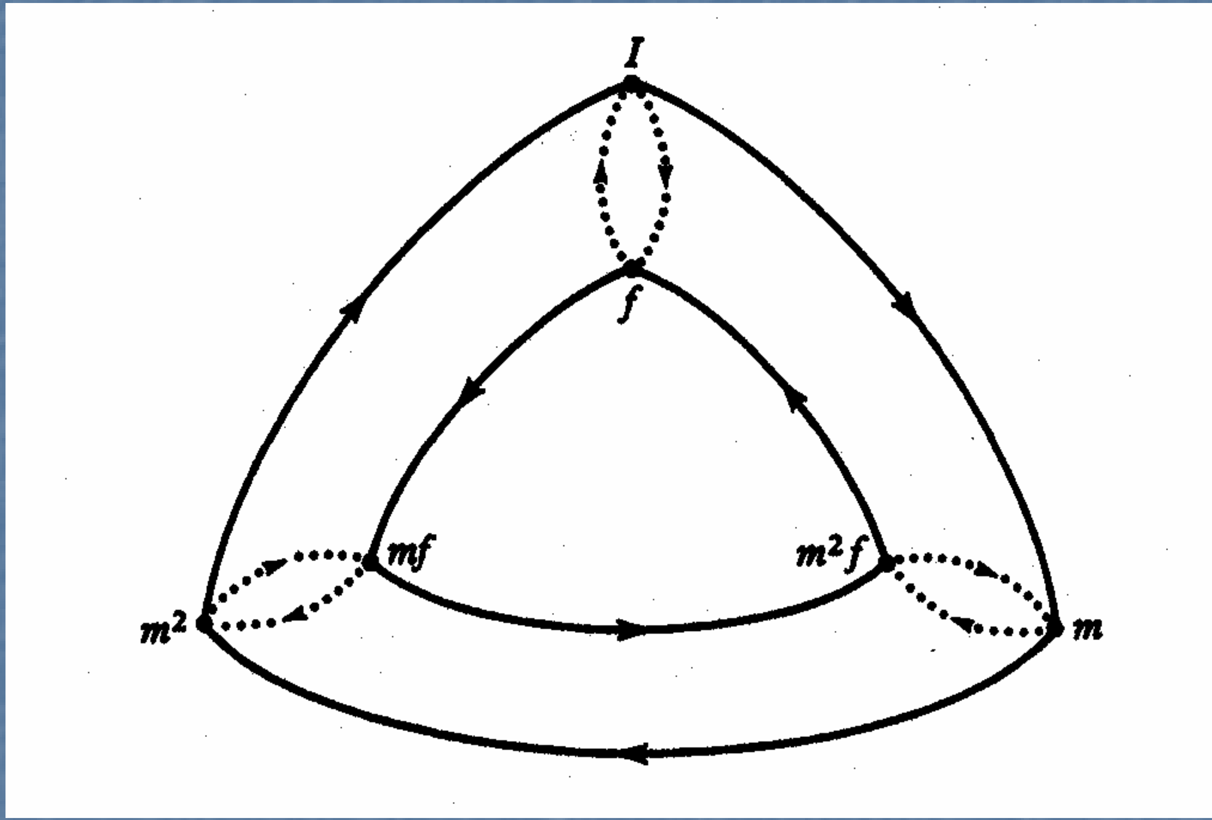


Diagrama de Cayley do grupo D3



TPC 7 O "paradoxo dos gémeos"

Pedro e Paulo são gémeos com 21 anos, nascidos no ano 3021.

1) Pedro embarca numa nave e viaja durante sete anos à velocidade uniforme de v=(24/25)c. Ao fim desses anos inverte o sentido e regressa à Terra nos sete anos seguintes.

Que idade têm Pedro e Paulo quando se encontram ?

2) Como se explica que um raciocínio simétrico não está correcto ?

1) Transformações de Lorentz

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2}\frac{x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x^{1'} = -v\frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

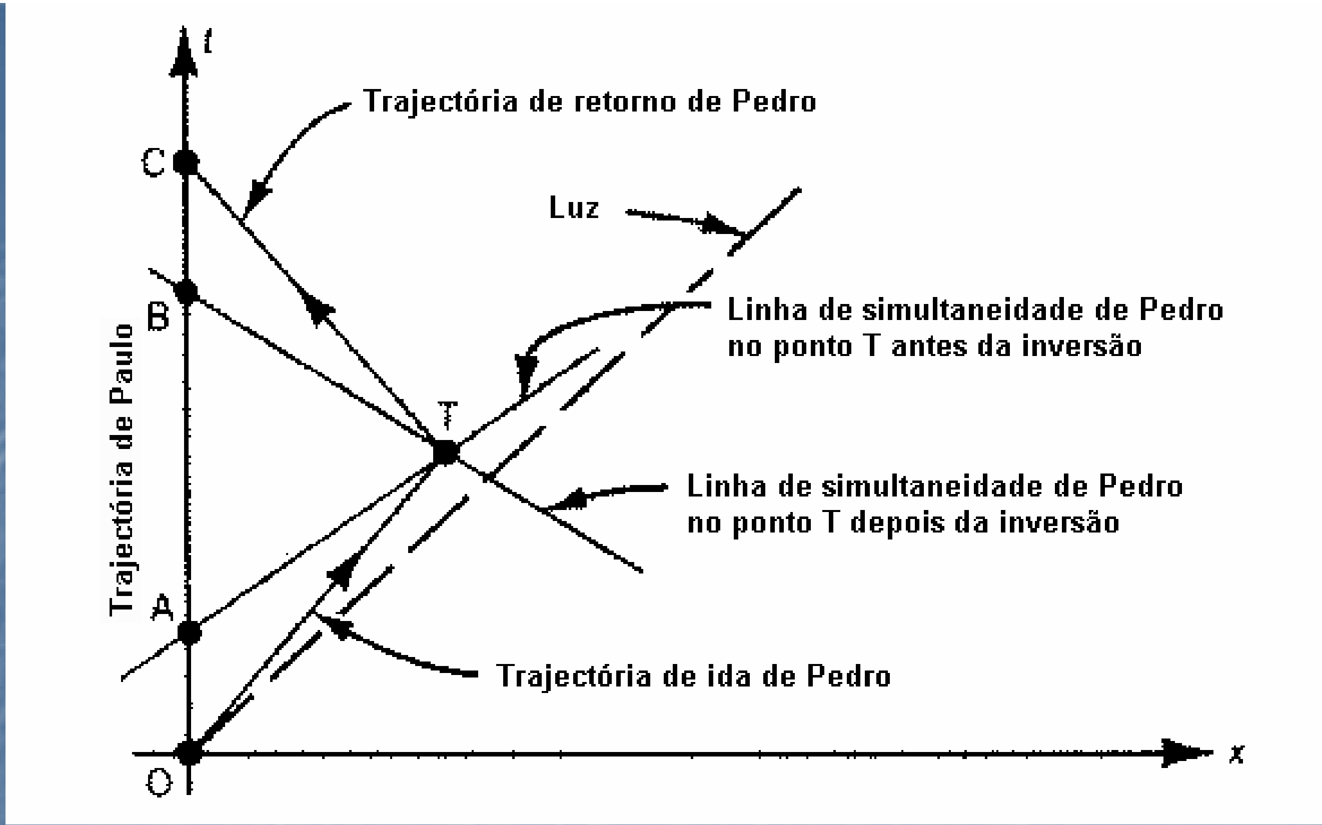
$$v = \frac{24}{25}c \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{25}{7}$$

Donde, para t=7, obtém-se t'=25

Idade do Pedro = 21 + 7 + 7 = 35 anos

Idade do Paulo = 21 + 25 +25 = 71 anos

2) O raciocínio simétrico que Pedro poderia fazer não é correcto porque, enquanto que Paulo está sempre no mesmo referencial de inércia, Pedro muda de referencial no regresso.



Fazendo um calculo semelhante no referencial do Pedro, os seus 7+7 anos correspondem a 1,96+1,96 anos no referencial do Paulo, isto é aos segmentos OA e BC definidos pelas linhas de simultaneidade do referencial em movimento. Porém deste modo o segmento AB de 46,08 anos não é contado. Um cálculo correcto feito pelo Pedro devia tomar em consideração este segmento e o resulatdo seria o mesmo.