



A matemática como metáfora

- Considerando a Matemática como uma Metáfora, a própria interpretação do conhecimento matemático é um acto altamente criativo.

Num certo sentido a Matemática é uma novela acerca da Natureza e da Humanidade. E não se pode dizer precisamente o que é que a Matemática nos ensina, do mesmo modo que não se pode dizer exactamente o que a leitura de “Guerra e Paz” nos ensina.

O conhecimento é incorporado ele próprio no acto de repensar esse ensinamento.

(Y. I. Manin)

O poder da matemática ou A matemática como metáfora

Rui Vilela Mendes

CMAF, ICC, CFN

Curso no Mestrado de Complexidade, ISCTE, Inverno 2007

25-02-2007

Índice

- 1 – Informação , entropia e medidas de Gibbs
- 2 – Leis de escala e leis sem escala
- 3 – Grupos e simetrias
- 4 – Caos e dependência sensível

A - Informação e entropia

- Informação = Medida do conhecimento que se adquire com a ocorrência de um acontecimento quando previamente apenas se conhecia a sua probabilidade
- Suponhamos N acontecimentos indexados por uma memória binária de comprimento A
 $N = 2^A$ $A = \log N / \log 2$ $b = \log N$ (no. de bits)
- Consideremos os acontecimentos agregados em classes
 $N = \sum N_i$ $p_i = N_i / N$ (probabilidade da classe i)
- Seja b_i a informação recebida quando nos dizem que o acontecimento pertence à classe i

A - Informação e entropia

- Se a medida da informação for independente do modo como é adquirida

$$b_i + \log N_i = \log N \quad b_i = -\log(N_i/N) = -\log p_i$$

- Portanto o valor médio da (falta) de informação associada aos acontecimentos

$$I(p) = \sum p_i \log p_i \quad S = -I \text{ (incerteza = entropia)}$$

- $S(p) = -\sum p_i \log p_i$ (Entropia de Shannon)

- A informação associada a acontecimentos independentes é aditiva $P_{ik} = p_i q_k$

$$I(P) = \sum p_i q_k \log(p_i q_k) = \sum p_i \log p_i + \sum q_k \log q_k = I(p) + I(q)$$



A – Informação e entropia

- Axiomas de Khinchin
- (1) $I(p) = I(p_1, p_2, \dots, p_N)$
- (2) $I(1/N, 1/N, \dots, 1/N) \leq I(p)$
- (3) $I(p_1, p_2, \dots, p_N) = I(p_1, p_2, \dots, p_N, 0)$
- (4) Considere-se dois sistemas com probabilidades $\{p_i\}$ e $\{q_k\}$ mas que podem estar correlacionados com probabilidade conjunta P
$$I(P) = I(p) + \sum_i p_i I(q|i) \quad \text{sendo}$$
$$I(q|i) = \sum_k q(k|i) \log q(k|i)$$
- $\rightarrow I(P) = c \sum_i P_i \log(P_i)$



A. YA. KHINCHIN

A – Informação e entropia

- Os axiomas de Khinchin implicam também
(4') $I(P)=I(p)+I(q)$
para acontecimentos independentes
- Porém, se em vez de (1)+(2)+(3)+(4) , tivermos
(1)+(2)+(3)+(4') há uma solução mais geral

- **TPC 1:**

Mostrar que

$I_\beta(p) = (1/(\beta-1)) \log \sum_i (p_i)^\beta$
é solução de (1)+(2)+(3)+(4') e que
 $\lim_{\beta \rightarrow 1} I_\beta(p) = I(p)$

- $S_\beta(p) = - I_\beta(p) =$ Entropia de Renyi



B – Uma viagem ao país dos lançadores de dados (com agradecimentos a E. T. Jaynes e P. Collet)

- Um matemático faz uma viagem ao país dos lançadores de dados e tendo ofendido a ideologia local ao escarnecer da frivolidade da ocupação favorita dos habitantes, é encerrado numa masmorra.
- Entretanto, à porta da sua cela, os guardas prisionais entretêm-se a lançar dados e a sobre eles fazer as mais variadas estatísticas
- Algumas semanas mais tarde é-lhe feito o seguinte desafio:
“Pois se a nossa ocupação é tão frívola, resolve o seguinte problema:
- Lançámos nos últimos dias um mesmo dado 100000 vezes e a média foi 4. Se descobrires quantas vezes saiu o 1, irás em liberdade.
- E qual é o erro admissível? (pergunta o matemático)
- 1% e se errares cortamos-te a cabeça, oh infiel”
- O matemático pensou, fez algumas contas e deu a resposta certa, tendo sido posto em liberdade e regressado ao seu país de origem.
- A sua frustração foi verificar que afinal no seu país as ocupações dos habitantes eram tão frívolas como as dos lançadores de dados
- Pergunta: Como é que o matemático conseguiu escapar e qual a probabilidade disso acontecer ?

B – Uma viagem ao país dos lançadores de dados

- Os únicos elementos de informação são :

$$\sum_k p_k = 1 \quad (a)$$

$$\sum_k k p_k = 4 \quad (b)$$

- A melhor alternativa é incorporar toda a informação conhecida e minimizar a informação sobre aquilo que não se conhece, isto é, fazer uma previsão o menos preconceituosa possível (*Princípio da entropia máxima*)
- Maximizar $\Gamma = \sum_k \{-p_k \log p_k + \lambda_1 p_k + \lambda_2 k p_k\}$
- $\partial \Gamma / \partial p_k = -\log p_k - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 k = 0$
- $p_k = \exp \{\lambda_1 - 1 + \lambda_2 k\}$
- $\partial^2 \Gamma / \partial p_k^2 = -1/p_k < 0$
- λ_1 e λ_2 obtidos a partir de (a) e (b)



B – Uma viagem ao país dos lançadores de dados

- $p_k = e^{\{-2,447+0,1746 k\}}$
- As medidas exponenciais de probabilidade assim obtidas chamam-se medidas de Gibbs
- $p_1 = 0,103065$ (para um dado “honesto” seria $1/6 = 0,166666\dots$)
- Portanto $N_1 = 10306$ é uma boa resposta
- ***Interpretação e estimativa de erro :***
- Em N lançamentos há $W = N! / (N_1! N_2! \dots N_6!)$ sequências com N_1 uns, N_2 dois, etc.
- Usando a fórmula de Stirling
$$\log W \approx N \{ -(N_1/N) \log(N_1/N) - \dots - (N_6/N) \log(N_6/N) \}$$
$$= N \{ -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \dots - p_6 \log p_6 \}$$

B – Uma viagem ao país dos lançadores de dados

- Portanto o *princípio da entropia máxima* corresponde à procura das *sequências típicas*
- Usando $\sum_k p_k = 1$ e $\sum_k k p_k = 4$ têm-se
$$p_6 = -1 + 4 p_1 + 3 p_2 + 2 p_3 + p_4$$
$$p_5 = 2 - 5 p_1 - 4 p_2 - 3 p_3 - 2 p_4$$
- donde
$$\partial \log W / \partial p_1 = N \{-\log p_1 - 1 + 5 \log p_5 + 5 - 4 \log p_6 - 4\} = 0$$
$$\partial^2 \log W / \partial p_1^2 = -N \{1/p_1 + 25/p_5 + 16/p_6\} = -195,17N$$
- Na vizinhança do máximo
$$\log W(p_1) \approx \log W_{\max} - 97,58 N (p_1 - p_{1\max})^2$$
- $p(N_1) \approx \exp\{-97,58 N (N_1/N - p_{1\max})^2\}$
- Erro de 1% com $N=100000 \rightarrow p(N_1)=5,77 \cdot 10^{-5}$

B – Uma viagem ao país dos lançadores de dados

- **TPC 2 :**

A média foi 4 e o dois saiu 13077 vezes em 100000 lançamentos.

Quantas vezes saiu o um ?

C – Medidas de Gibbs (em geral)



- Considere-se um conjunto de possibilidades (ou de sistemas) das quais apenas se conhece o valor médio de certas quantidades (extensivas)
- $M^{(a)} = \sum_i p_i M^{(a)}_i \quad \rightarrow \quad 0 = \sum_i M^{(a)}_i \delta p_i$
- $1 = \sum_i p_i \quad \rightarrow \quad 0 = \sum_i \delta p_i$
- Princípio de entropia máxima
 $I(p) = \sum_i p_i \log p_i \quad \rightarrow \quad 0 = \sum_i (1 + \log p_i) \delta p_i$
 \downarrow
 $0 = \sum_i (\log p_i - \Psi + \beta_a M^{(a)}_i) \delta p_i$
- $\rightarrow p_i = \exp\{\Psi - \beta_a M^{(a)}_i\}$
- $\rightarrow S = -I(p) = -\Psi + \beta_a M^{(a)}$

C – Medidas de Gibbs (em geral)

- $S = \text{Entropia} = -\Psi + \beta_a M^{(a)}$
- $M^{(a)} = \text{variável extensiva}; \beta_a = \text{variável intensiva}$
- $\Psi = \text{Energia livre} \quad \Psi = -\log Z$
- $Z = \text{Função de partição}$
- $1 = \sum_i p_i \rightarrow Z = \sum_i \exp(-\beta_a M^{(a)}_i)$
- **Exemplos :**
 - (1) Conjunto canónico
 $M^{(a)} = \text{Energia média}$
 - (2) Grande conjunto canónico
 $M^{(a)} \text{ ' } s = \text{Energia, volume e número de partículas (médios)}$

D – Teste de hipóteses. O teorema de Bayes

- Vamos testar duas hipóteses A e B com probabilidades a-priori $p_0(A)$ e $p_0(B)$, sabendo-se que o efeito x tem probabilidade $p(x|A)$ de ser provocado por A e a probabilidade $p(x|B)$ de ser provocado por B.
- Se se observar x, qual é a probabilidade de que tenha ocorrido a hipótese A ?
- *Teorema de Bayes*
$$p(A,x)=p(A|x)p(x)=p(x|A)p_0(A)$$
$$p(x) = p(x|A)p_0(A)+ p(x|B)p_0(B)$$
- $$p(A|x)=(p(x|A) p_0(A)) / (p(x|A)p_0(A)+ p(x|B)p_0(B))$$



REV. T. BAYES

D – Teste de hipóteses. O teorema de Bayes

- **Exemplo:** Detecção de partículas μ e π
- O detector de μ 's detecta μ 's (efeito x) com eficiência 95% e pode identificar (erroneamente) um π como um μ em 2% dos casos
- O feixe contém uma mistura de 90% π 's e 10% μ 's
- Qual a probabilidade de que, quando o detector dispara, tenha sido de facto registado um μ ?
- $p(\mu|x) = (0.95 \times 0.1) / (0.95 \times 0.1 + 0.02 \times 0.9) = 0.84$
- **TPC 3 :** Aplique o teorema de Bayes a um exemplo no seu domínio de actividade



Fim da primeira aula



2 – Leis de escala e leis sem escala

✦ TPC 4:

- ✦ Uma lebre vai a fugir dum galgo numa planície. Chega à beira de uma colina e tem duas escolhas:

1- Continuar a correr na planície ou

2- Correr colina acima

- ✦ A lebre, que não sabe matemática, faz a má escolha e é apanhada pelo galgo
- ✦ Se soubesse matemática qual era a escolha que faria ?

2 – Leis de escala e leis sem escala

- ✦ *Como varia a distância máxima de corrida (sem beber) dum animal no deserto ? ($\approx L$)*

Reservas de água $\approx L^3$

Evaporação $\approx L^2 \quad \rightarrow \quad L^3 / L^2 = L$

- ✦ *Como varia a altura do salto dum animal em função do tamanho? ($\approx L^0$)*

Energia para um salto $h \approx hL^3$

Trabalho da força muscular $F \approx FL$

$F \approx L^2$ (resistência dos ossos)

$hL^3 = L^2 \times L \quad \rightarrow \quad h \approx L^0$

2 – Leis de escala e leis sem escala

✦ *Elementos para a resolução do TPC 4*

-Sendo o rendimento dos músculos $\approx 25\%$, a potência útil desenvolvida por um animal em esforço depende da dissipação de calor $\approx L^2$

-A resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade e à área transversal $\approx v^2 L^2 \rightarrow$ Potência $\approx v^3 L^2$

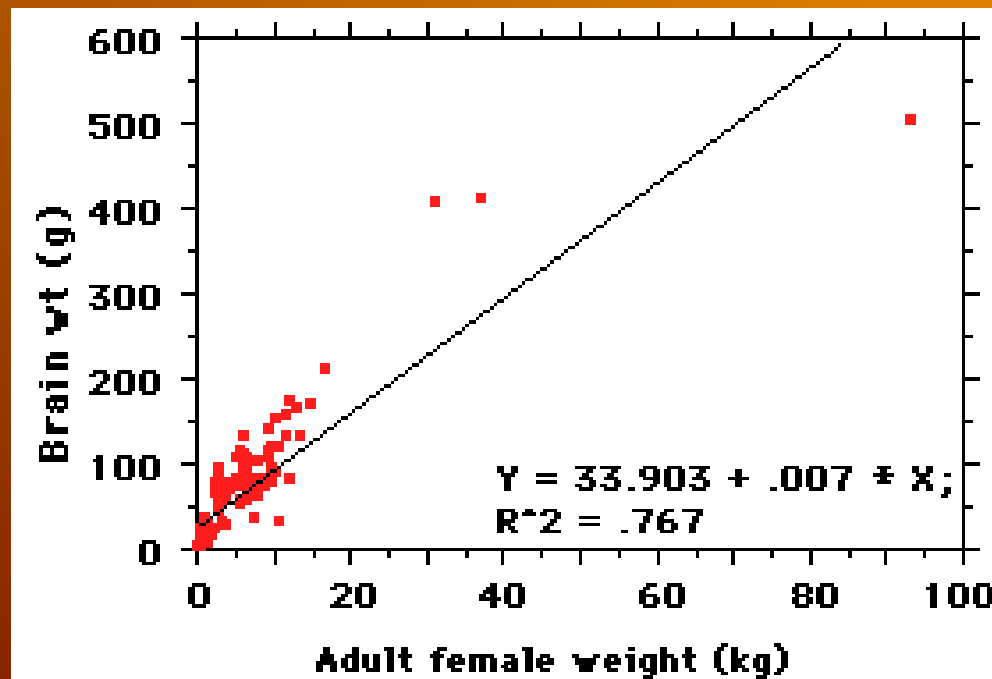
-Para subir uma encosta a potência necessária é $\approx v L^3$

Alometria dos fenômenos biológicos

- Na interpretação de causas e efeitos as relações lineares são muito usadas

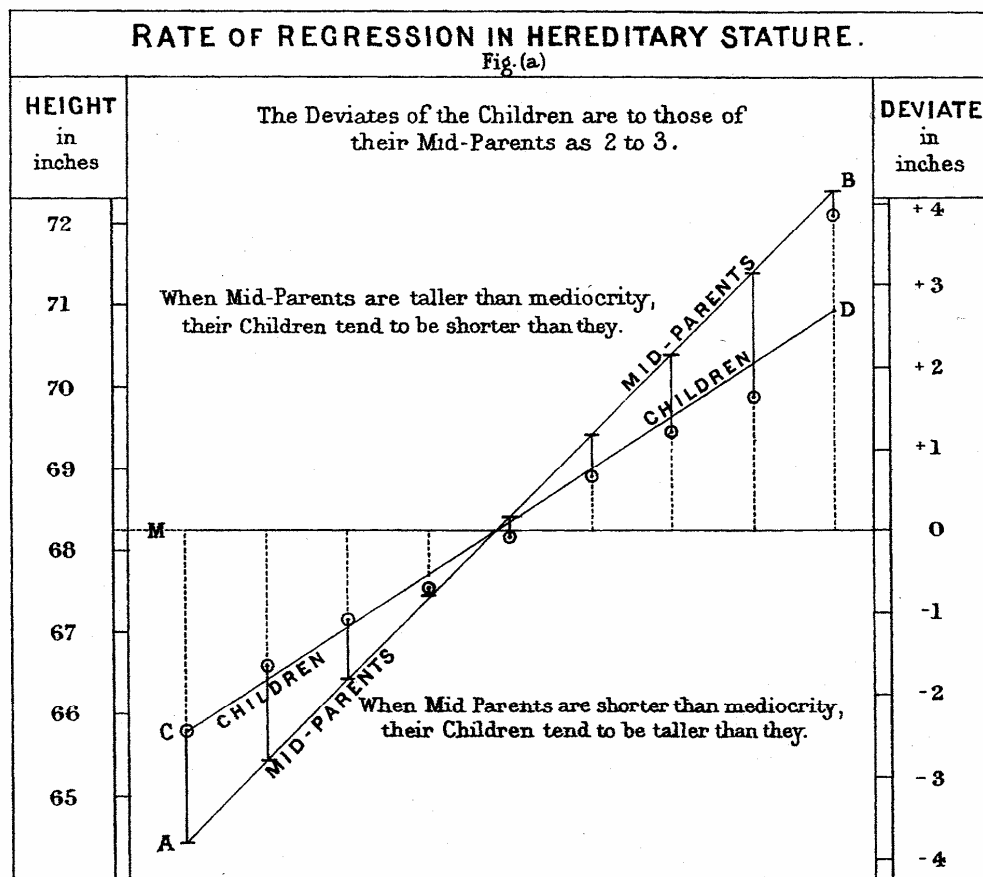
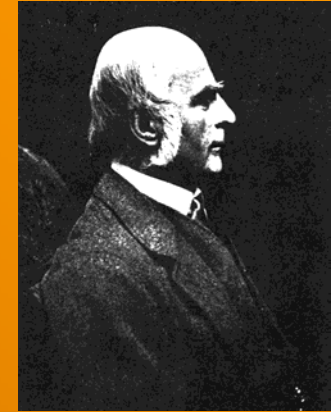
$$Y = a * X + b$$

- Porém no mundo real a (regressão) linear não é em geral adequada



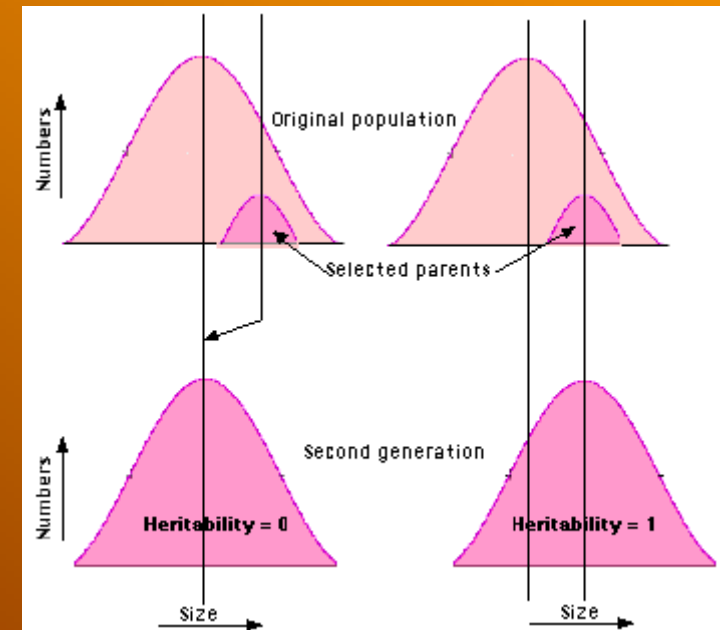
Alometria dos fenómenos biológicos

Origem do termo regressão (Galton)



J.P. & W.R. Emslie, lith.

Porém :



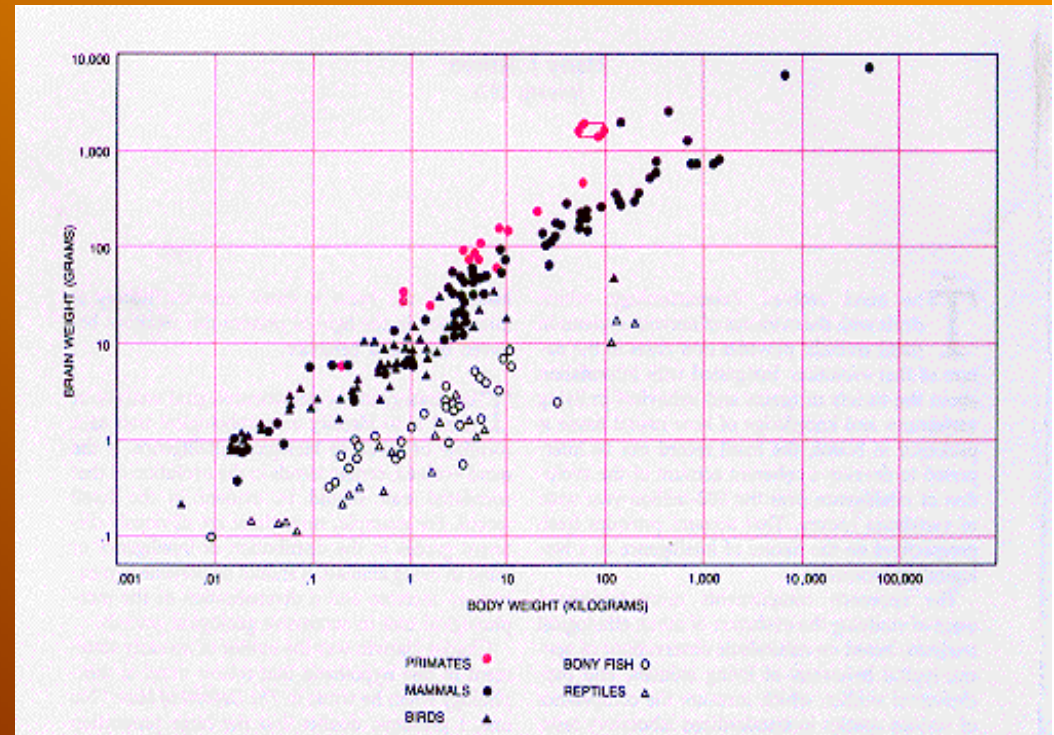
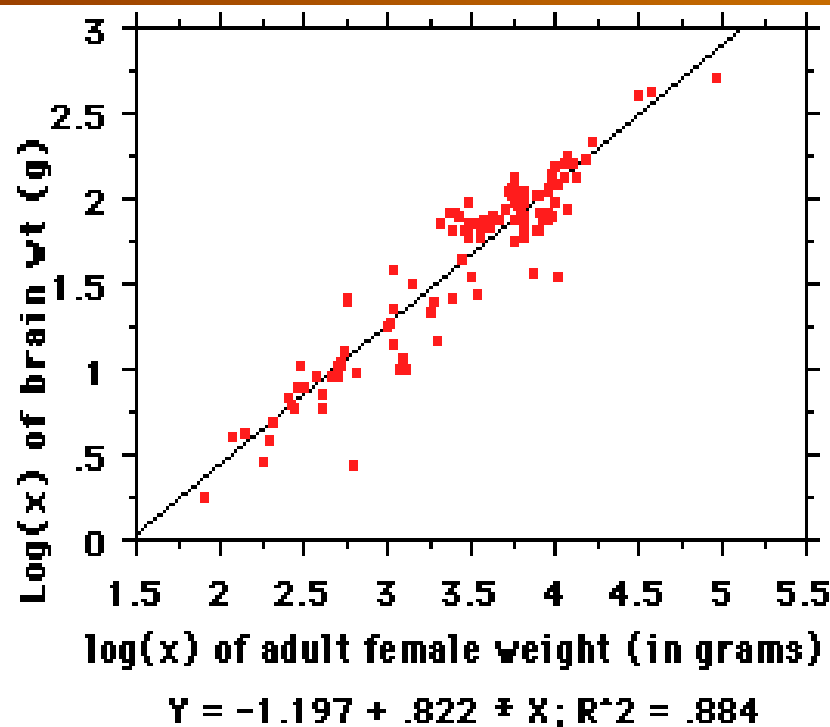
Alometria dos fenômenos biológicos

✦ Alo (Outra) - metria

$$Y = a * X^b$$

$$\log Y = b * \log X + \log a$$

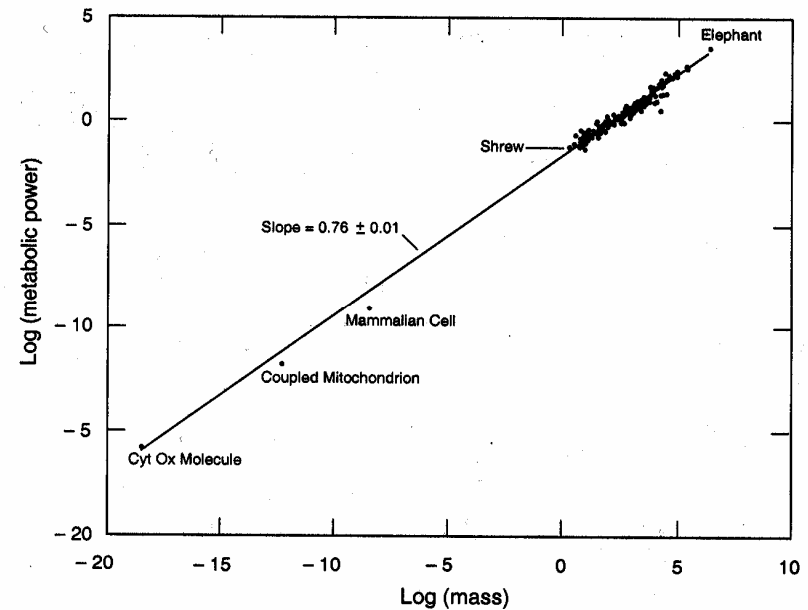
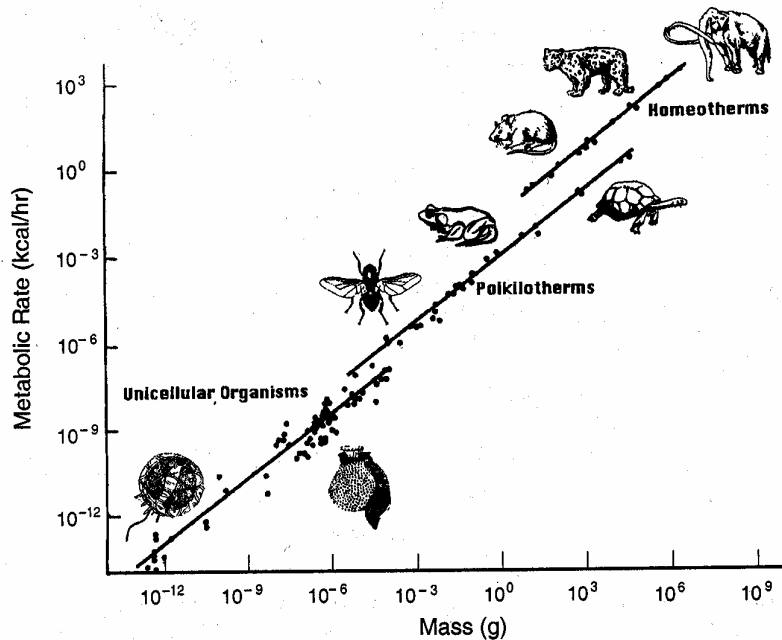
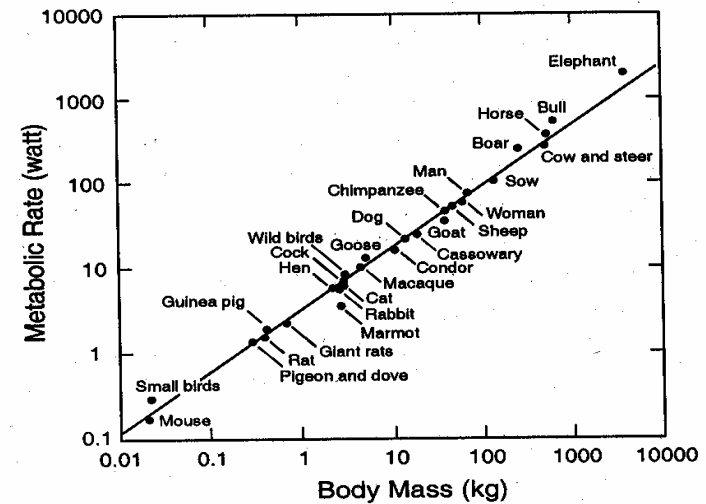
✦ Peso do cérebro / peso do organismo



Alometria dos fenómenos biológicos

Metabolismo (B)

$$b = 3/4$$



Alometria dos fenômenos biológicos

- ✦ A uniformidade da lei dos $\frac{3}{4}$ nos animais e plantas sugere um mecanismo físico universal regendo todos os seres vivos.
- ✦ As estruturas biológicas são limitadas pela taxa a que os nutrientes lhes podem ser fornecidos. Portanto :
 - ✦ (1)– É necessária uma rede de distribuição que cubra todo o volume
 - ✦ (2)- Os capilares finais da rede têm sensivelmente o mesmo diâmetro em todos os seres (agregados de células de tamanho semelhante)
 - ✦ (3)- A evolução faz sobreviver organismos com a máxima eficiência energética

Alometria dos fenómenos biológicos

- $B \sim M^b$

- Fluxo de nutrientes

$$B \sim N_N \pi r_N^2 u_N$$

(2) implica

$$M^b \sim N_N = n^N$$

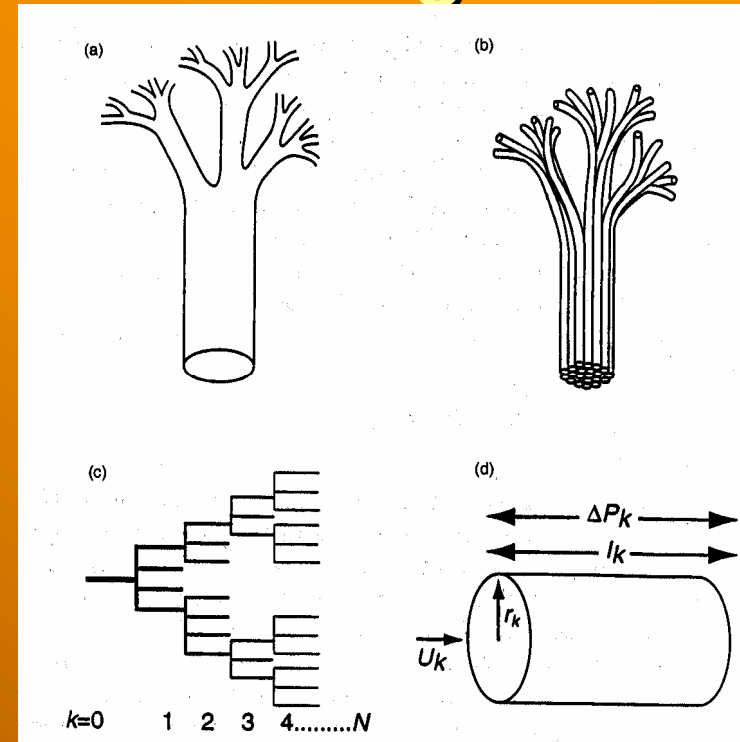
n = taxa média de ramificação

- Volume total a ser alimentado

v_k = volume associado ao nível k

$$N_k v_k \sim N_k l_k^3 \text{ independente de } k, N_k = n^k$$

implica $l_{k+1}/l_k = \gamma = 1/n^{1/3}$



Alometria dos fenômenos biológicos

- ✦ (3) implica preservação da área

$$N_{k+1} \pi r_{k+1}^2 = N_k \pi r_k^2 \quad r_{k+1}/r_k = \beta = 1/n^{1/2}$$

- ✦ $M \sim$ Volume total de fluido

$$M \sim \sum_{k=0}^N \pi r_k^2 l_k n^k = v_N (\beta^2 \gamma)^{-N} (1 - (\beta^2 \gamma n)^{N+1}) / (1 - \beta^2 \gamma n) \sim (\beta^2 \gamma)^{-N}$$

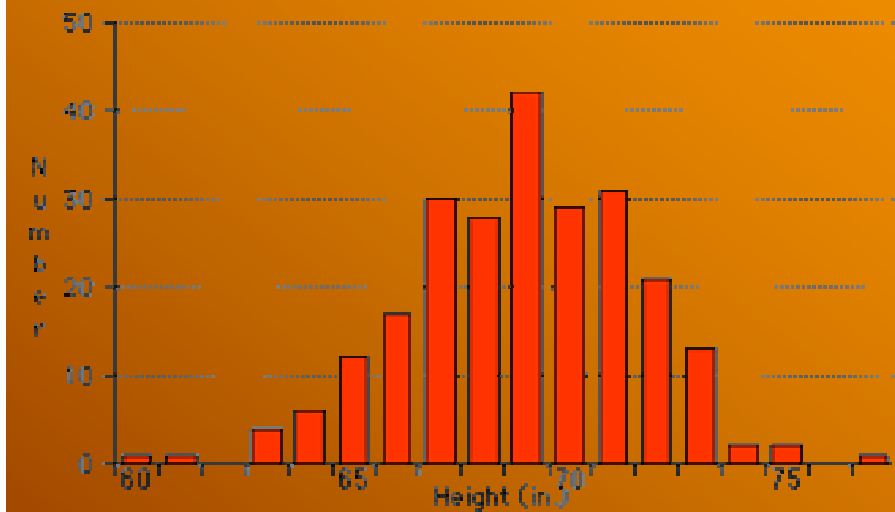
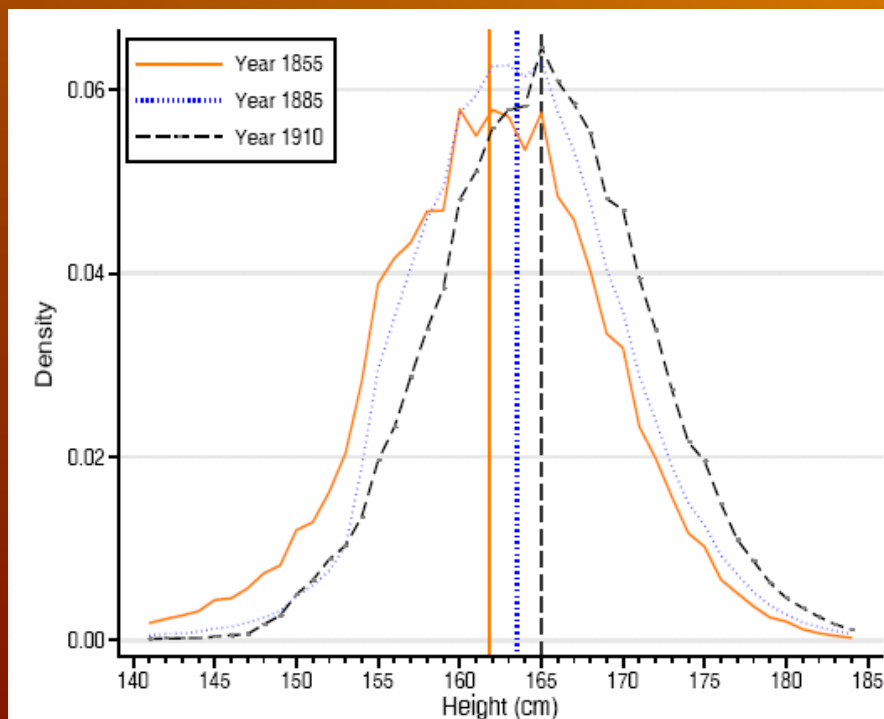
porque (2) implica $v_N \sim$ constante

- ✦ De $M \sim (\beta^2 \gamma)^{-N} = n^{4N/3}$ e $M^b \sim n^N$
obtem-se

$$b = 3/4$$

Probabilidade (frequência) de fenômenos com escala

- Até agora tratámos da relação das diversas escalas dum sistema
- Um problema diferente é a distribuição dos acontecimentos associados a uma dada escala.
Exemplos :
- Distribuição das alturas humanas

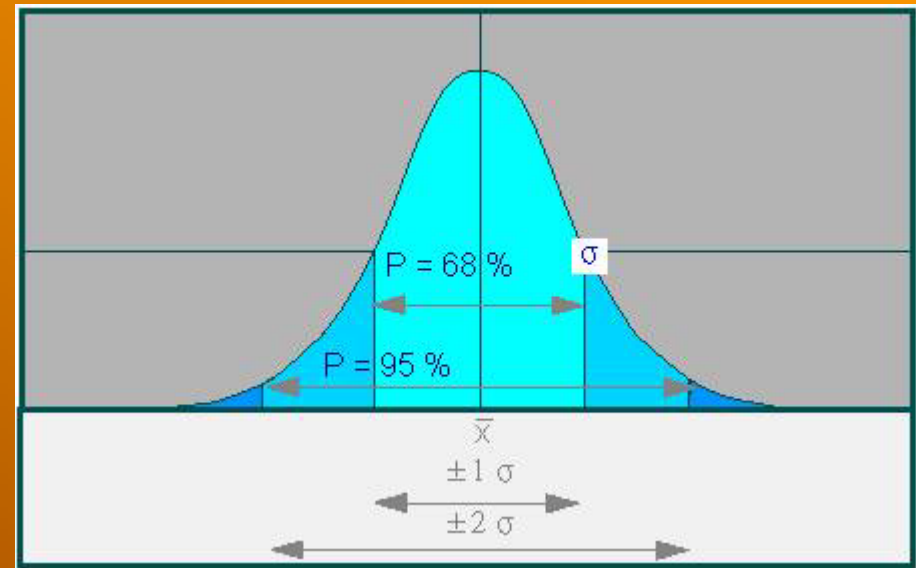


Probabilidade (frequência) de fenómenos com escala

- ◆ A distribuição das alturas é aproximadamente Gaussiana

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\bar{x})^2}$$

- ◆ A probabilidade de grandes desvios em relação à média decresce exponencialmente com um factor de escala σ

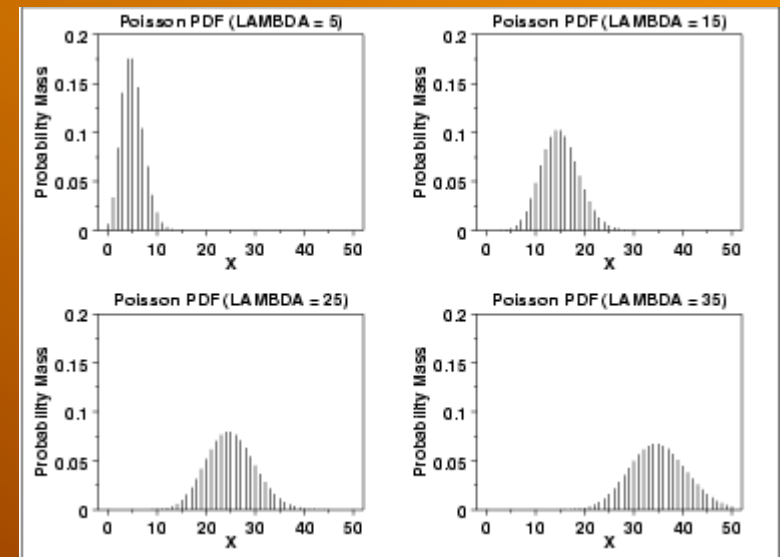


Probabilidade (frequência) de fenômenos com escala

- ✦ Distribuição do número de acontecimentos (independentes) que ocorrem numa unidade de tempo dada a probabilidade média = λ
- ✦ Exemplos:
 - Quantas bactérias existem por unidade de volume?
 - Quantas desintegrações radioactivas num intervalo de tempo ?
 - _ Quantas partículas de poeira existem num dado volume de ar ?

✦ Distribuição de Poisson

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$



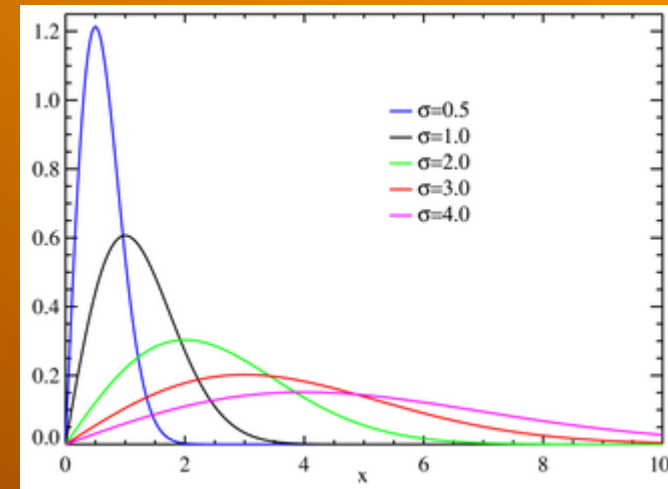
Probabilidade (frequência) de fenômenos com escala

◆ Distribuição de Rayleigh

Ocorre quando, por exemplo, um vector tem duas componentes ortogonais com densidades Gaussianas independentes

◆ Exemplos : distribuição da velocidade do vento , altura das ondas no oceano

$$p(x) = \frac{1}{\sigma^2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



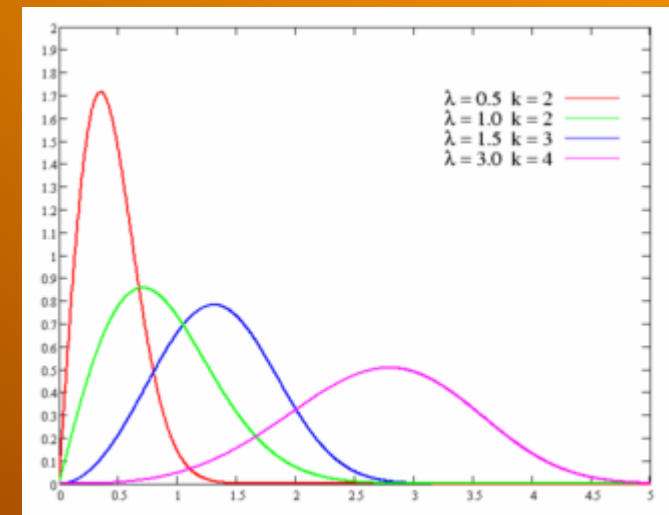
Probabilidade (frequência) de fenômenos com escala

◆ Distribuição de Weibull

Permite descrever dados experimentais, por exemplo em ciências da vida, pelo ajuste dos parâmetros.

Interpola entre a distribuição normal e a exponencial

$$p(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda} \right)^k}$$



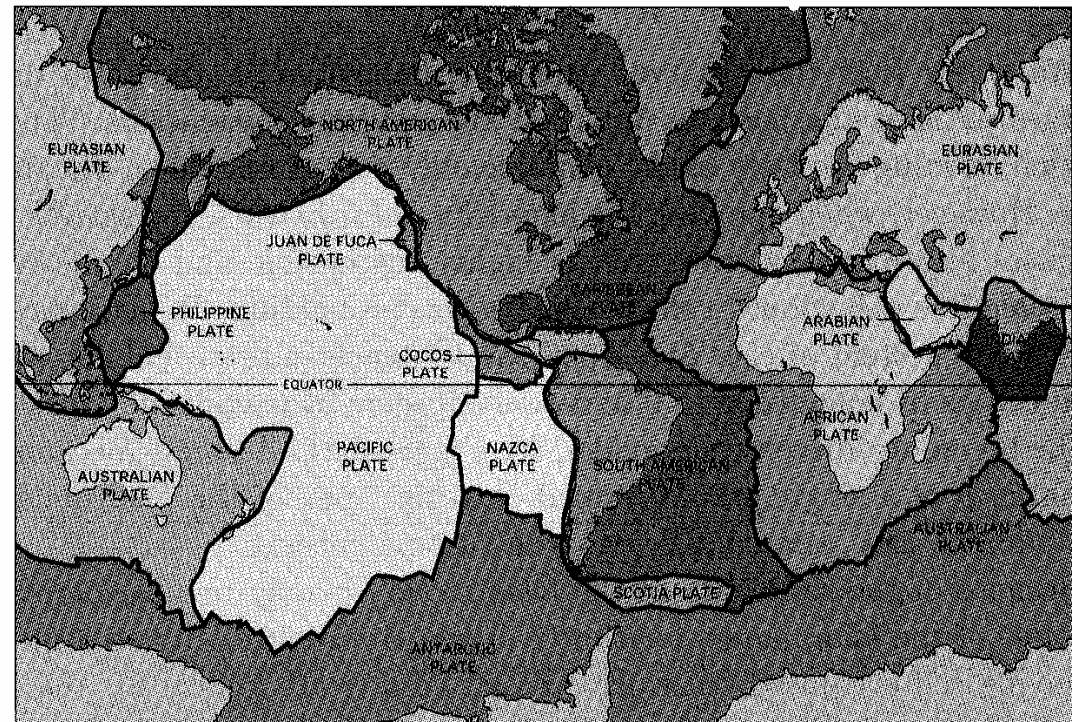
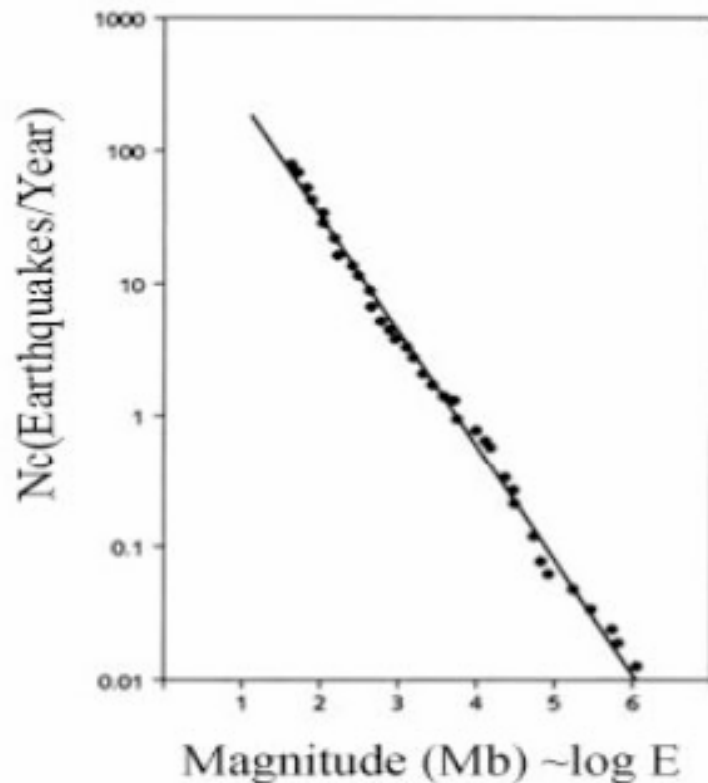
Fenómenos com escala e fenómenos sem escala

- ◆ Todas estas distribuições descrevem fenómenos em que a ocorrência de grandes desvios em relação à média decresce exponencialmente de acordo com uma certa escala característica.
- ◆ Haverá fenómenos sem uma escala característica ?
- ◆ Isto é, fenómenos em que a probabilidade de ocorrência de grandes desvios não decresce exponencialmente.
- ◆ Resposta : SIM e são frequentes na Natureza

Leis sem escala (Criticalidade auto – organizada –SOC)

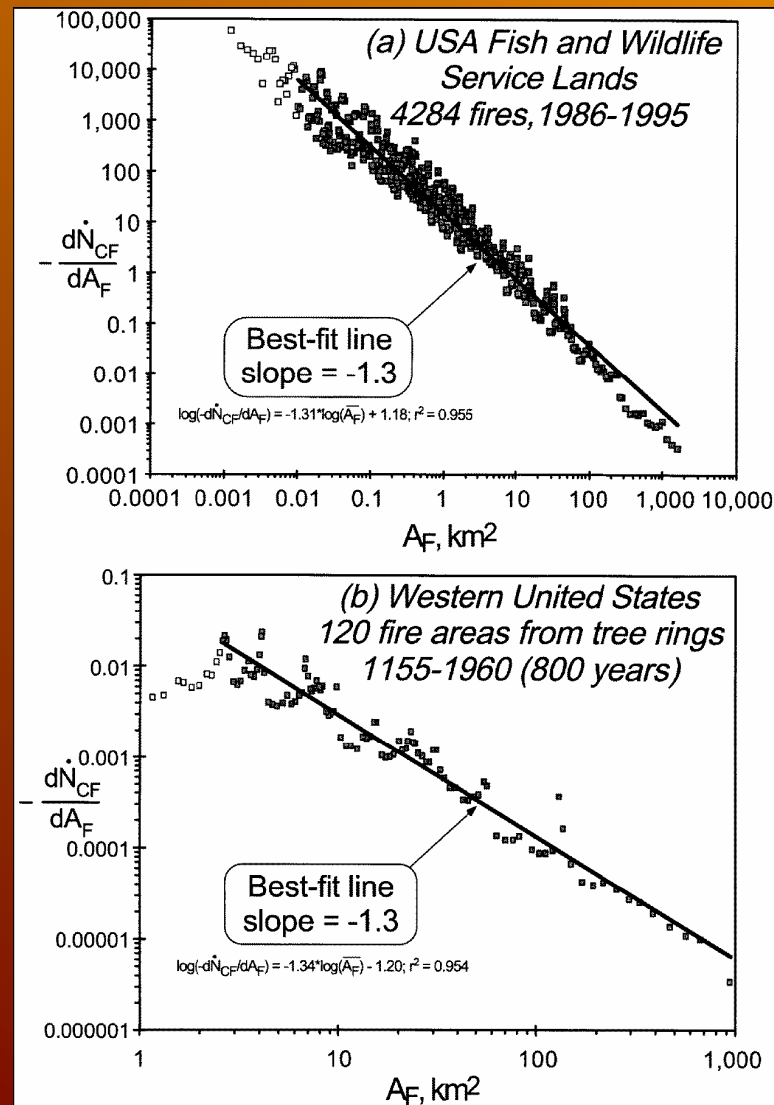
- ◆ Exemplos :
- ◆ Tremores de terra, lei de Gutenberg-Richter

$$N(E) = E^{-1-b}$$

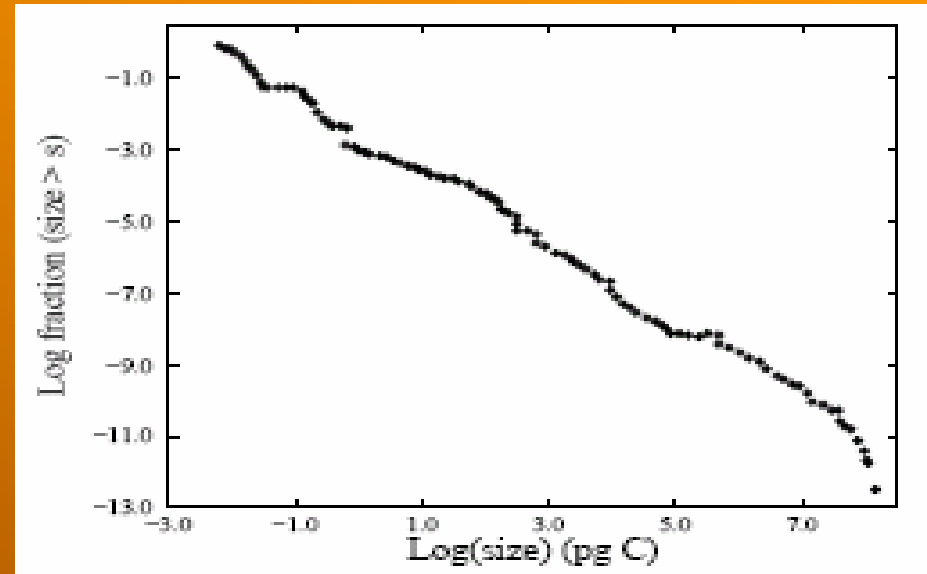


Leis sem escala (dinâmica)

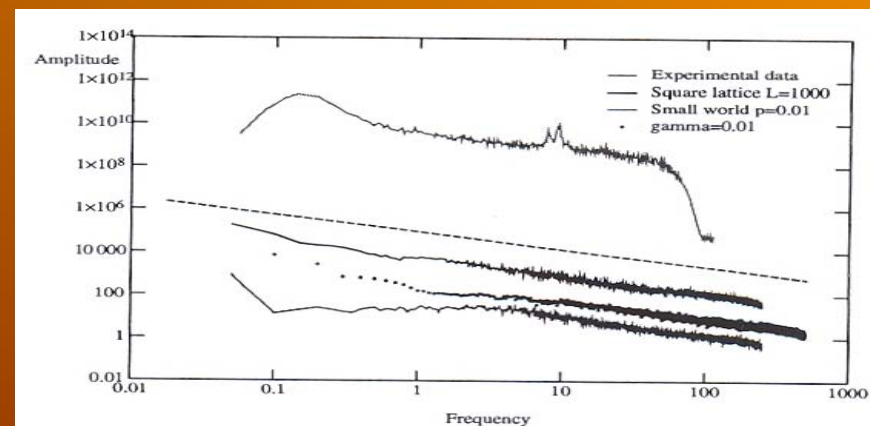
🌲 Fogos na floresta



Tamanho dos seres

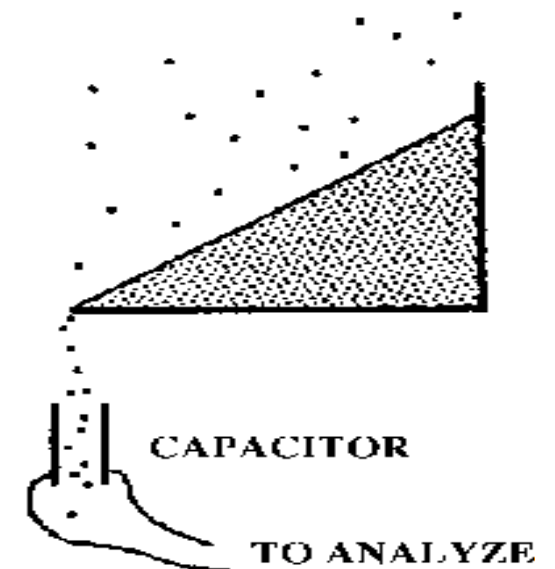
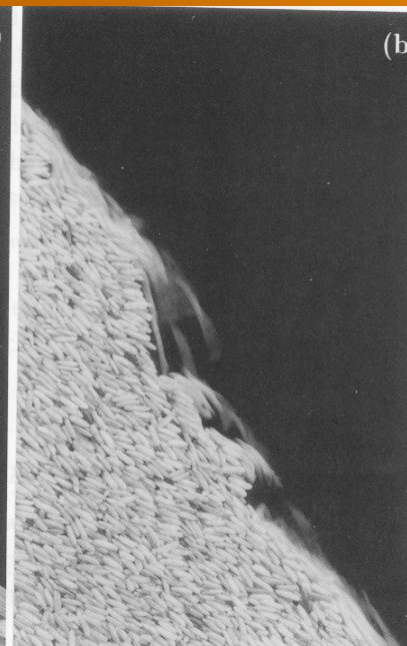
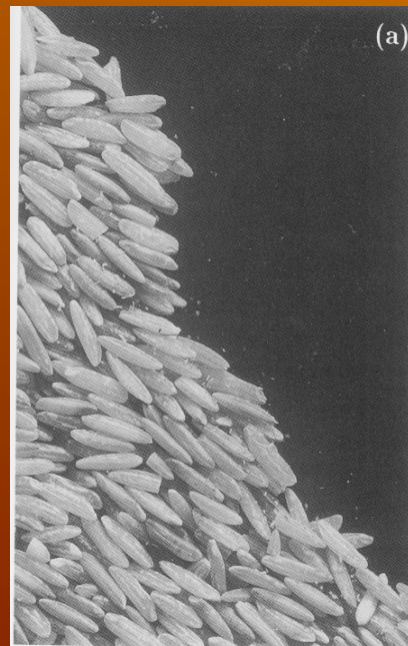
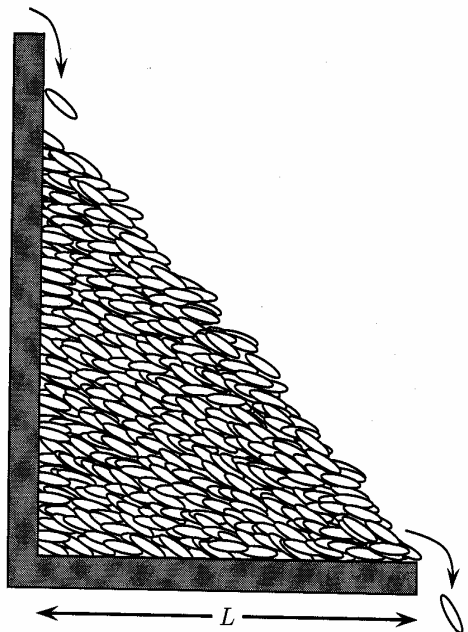
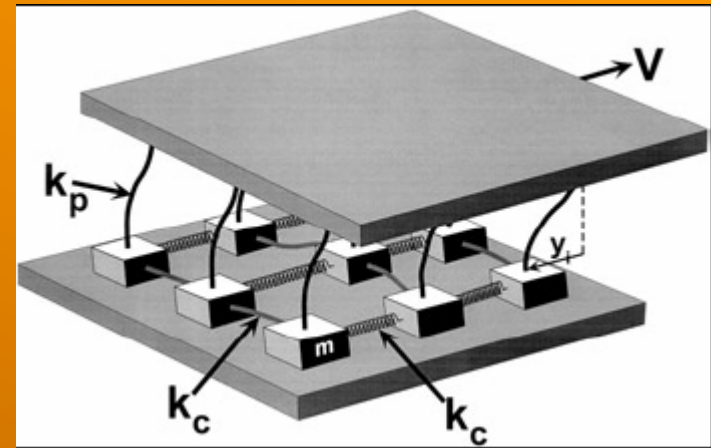


Actividade neuronal



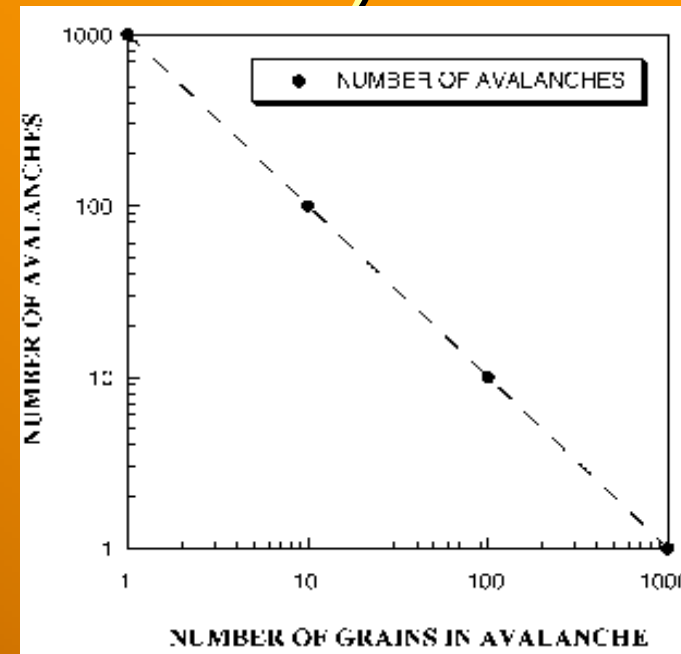
Leis sem escala (dinâmica)

- ◆ Modelos experimentais :
- ◆ Blocos deslizantes com molas
- ◆ Monte de arroz ou areia

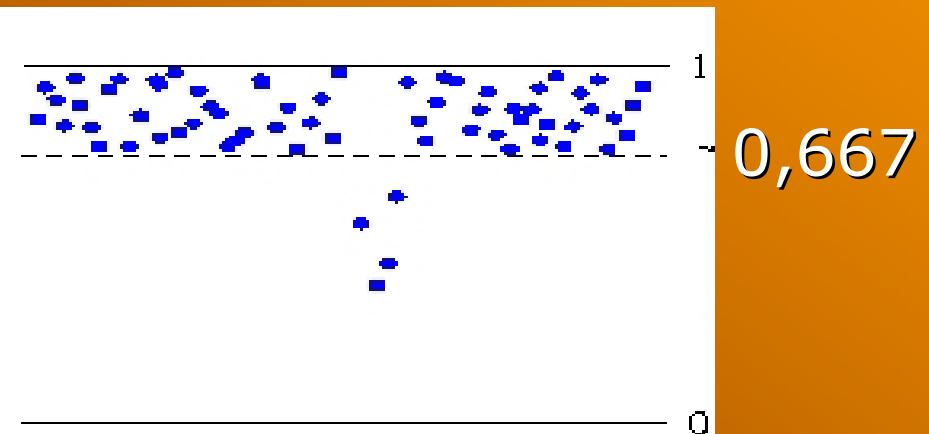
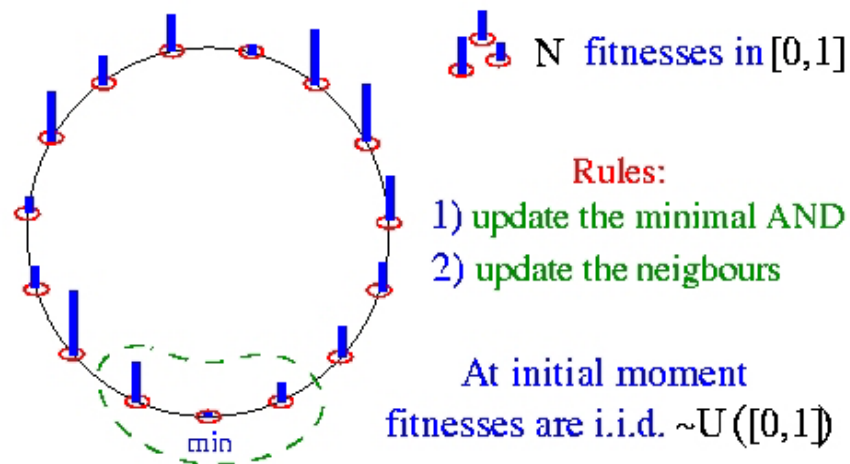


Leis sem escala (dinâmica)

- Estatística das avalanches



- Modelos matemáticos :
Bak-Sneppen

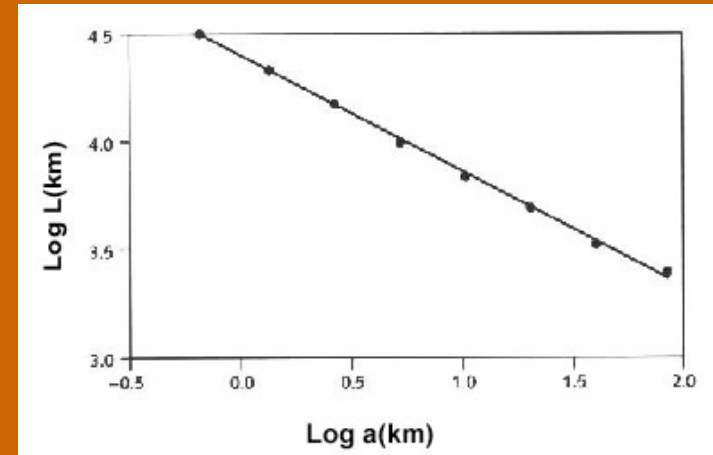


Leis sem escala (dinâmica)

- No modelo de blocos o tamanho duma avalanche é o número de blocos que se movimentam de cada vez
- No monte de arroz ou areia é o número de grãos
- E no de Bak-Sneppen o tempo de retorno a uma configuração em que todas as espécies têm robustez acima de 0,667
- Em todos os casos a distribuição é uma lei de potência, sem escala característica. Significa, em particular, que grandes avalanches são prováveis.
- Dois ingredientes dinâmicos são característicos de todos estes casos :
 - Dinâmica individual instável
 - Dinâmica extrema, isto é só os elementos que atingem um certo estado de tensão é que mudam de estado.
- Estes dois ingredientes dinâmicos são a chave da não existência (espontânea) duma escala característica (a ser discutido na lição 4. Ver comportamento dos expoentes de Lyapunov)

Leis sem escala (geometria)

- Qual é o comprimento duma costa ou duma fronteira ?
- Resposta : depende da régua que se usa para medir



Medição com mapas de escalas diferentes

- Volume (comprimento) dum objecto medido pelo número de caixas (régua) de lado "a" necessárias para o cobrir
- Portanto o volume medido é

$$N = \frac{C}{a^{d_F}}$$

$$V = a^{d_T} N = Ca^{(d_T - d_F)}$$

$$\log V = \log C + (d_T - d_F) \log a$$

Leis sem escala (geometria)

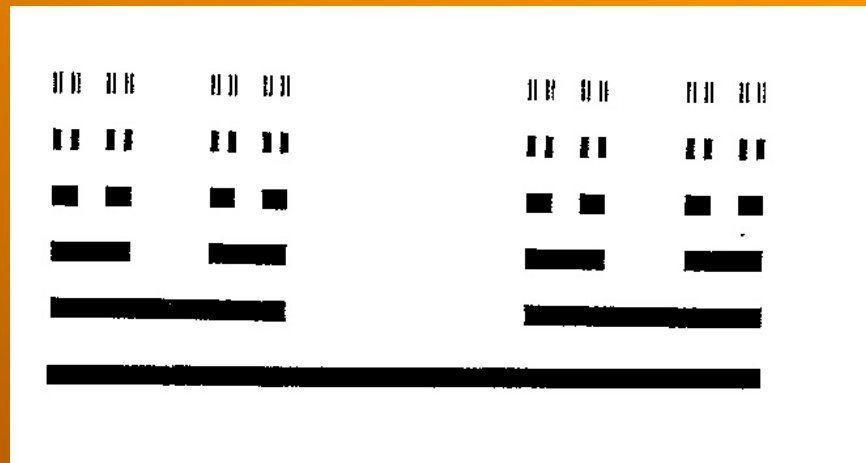
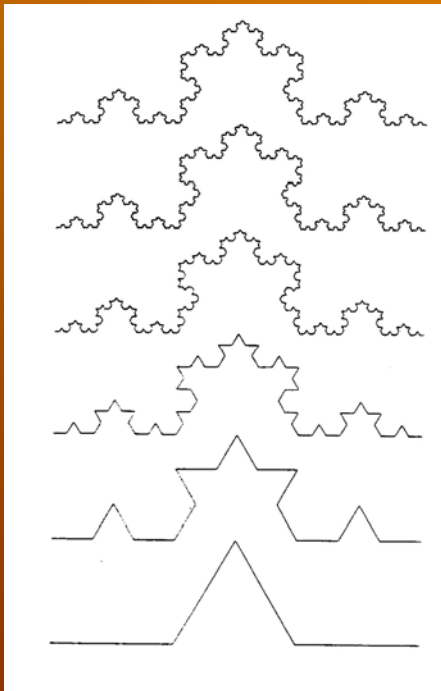
- ✦ No caso da medição duma costa ou duma fronteira entre dois países, $d_T=1$. Portanto

$$\log L = \log C + (1 - d_F) \log a$$

- ✦ Obtêm-se valores $d_F \sim 1,2 - 1,3$ para as costas
- ✦ Mandelbrot observa que comparando os valores do comprimento da fronteira entre Portugal e Espanha, indicado em enciclopédias dos dois países, há uma diferença, sendo o valor indicado na enciclopédia portuguesa 1,23 maior. Espanha sendo maior, é natural que os mapas usados para a medição da fronteira tenham sido de uma escala maior.
- ✦ Os fractais estão presentes em muitos fenómenos naturais :
 - Padrões geológicos e geográficos
 - Reacções químicas e biológicas
 - Fenómenos de percolação, etc.

Leis sem escala (geometria)

- ◆ Duas construções matemáticas de objectos fractais :
- ◆ A curva de Koch O conjunto ternário de Cantor



- ◆ TPC 5
Determine as dimensões fractais da curva de Koch e do conjunto ternário de Cantor



Fim da segunda aula



3 – Grupos e simetrias

Um grupo é uma das entidades matemáticas mais naturais

- Produto ($a \circ b$) = Composição de transformações
- Identidade ($1 \circ a = a$) = Não transformar
- Inverso ($a^{-1} \circ a = 1$) = Desfazer a transformação

Exemplos :

- # Translações no espaço e no tempo
- # Rotações
- # Transformações de referencial

Grupos Finitos

Exemplo: Grupos de simetria das figuras finitas no plano

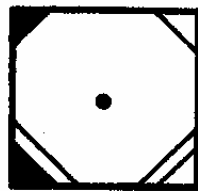
$C_N = N$ simetrias de rotação

$D_N = N$ simetrias de rotação e N simetrias de reflexão

Grupo de simetria do quadrado :

Oito elementos

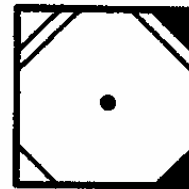
(Geradores : m = rotação de 90° e f = reflex o)



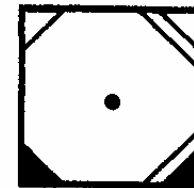
I



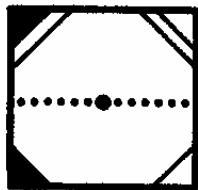
m



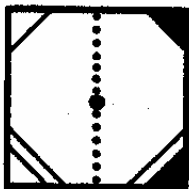
m^2



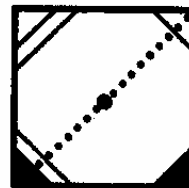
m^3



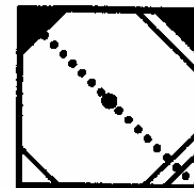
f



$m^2 f$



$m^3 f$



mf

Grupos Finitos

Grupo de simetria do quadrado :
Tabela de multiplicação

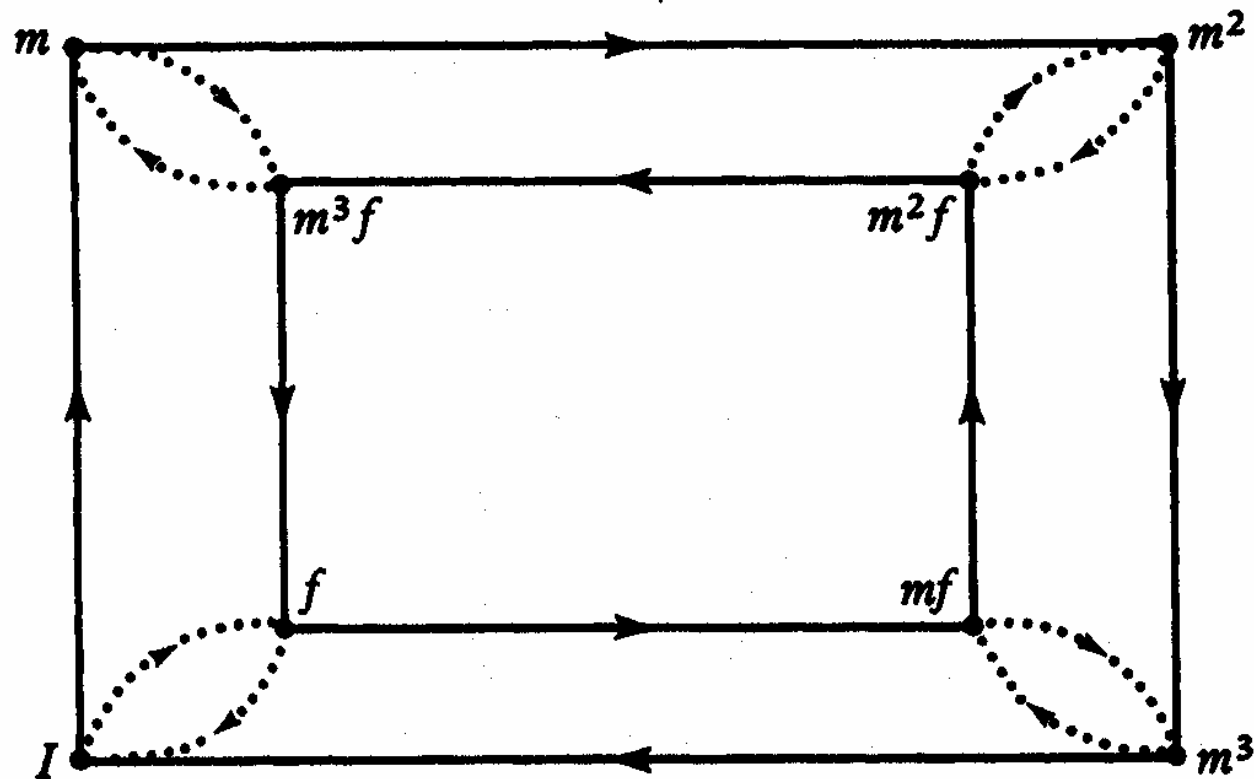
	I	m	m^2	m^3	f	mf	m^2f	m^3f
I	I	m	m^2	m^3	f	mf	m^2f	m^3f
m	m	m^2	m^3	I	mf	m^2f	m^3f	f
m^2	m^2	m^3	I	m	m^2f	m^3f	f	mf
m^3	m^3	I	m	m^2	m^3f	f	mf	m^2f
f	f	m^3f	m^2f	mf	I	m^3	m^2	m
mf	mf	f	m^3f	m^2f	m	I	m^3	m^2
m^2f	m^2f	mf	f	m^3f	m^2	m	I	m^3
m^3f	m^3f	m^2f	mf	f	m^3	m^2	m	I

Grupos Finitos

Grupo de simetria do quadrado :

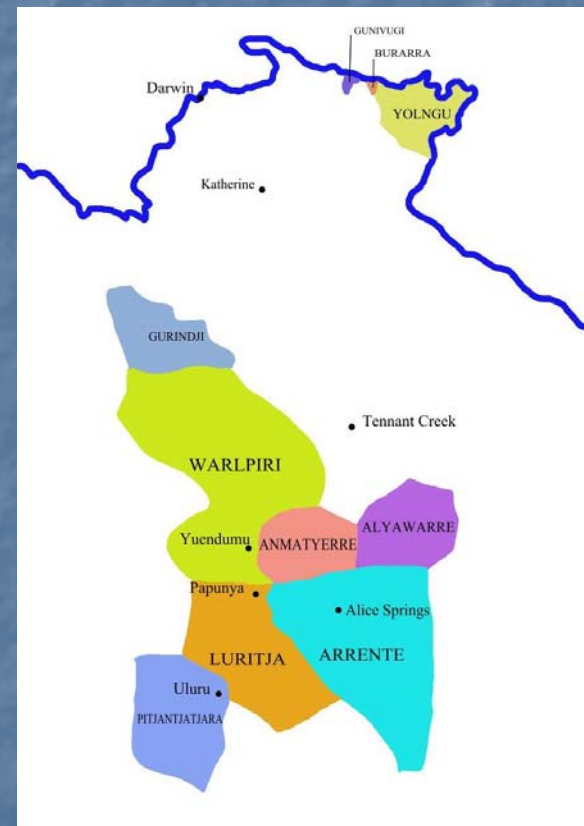
Diagrama de Cayley

—— Rotação ; Reflexão



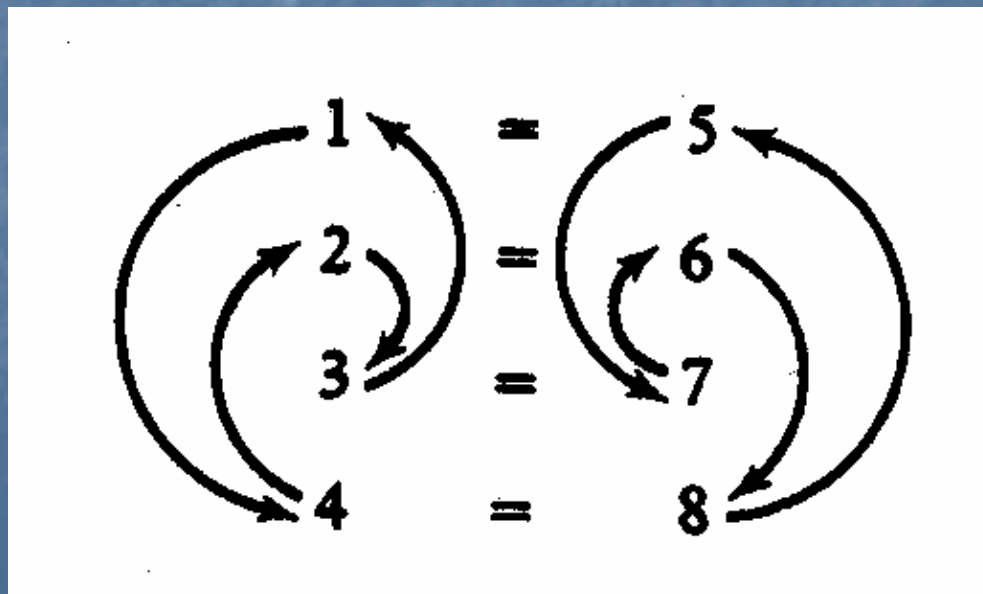
As relações de parentesco dos Warlpiri

Os Warlpiri



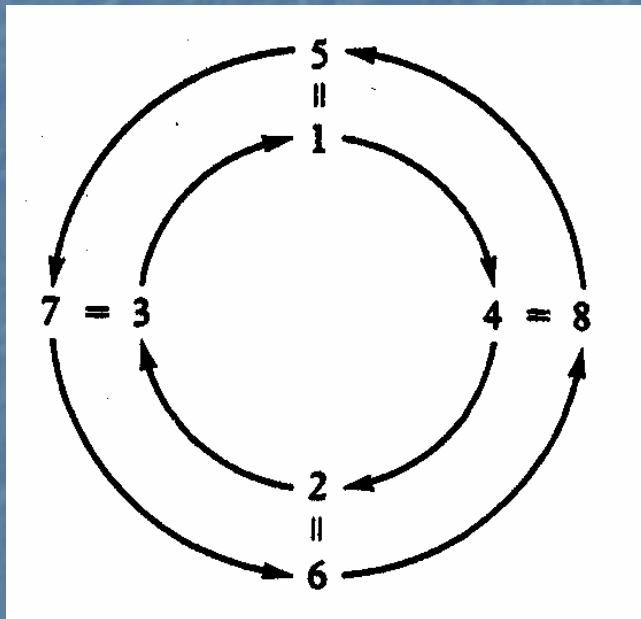
As relações de parentesco dos Warlpiri

- As relações de parentesco estabelecem na nossa sociedade um certo número de obrigações legais e tácitas. Comparadas com as de outros povos, as nossas relações de parentesco são relativamente simples
- Nos Warlpiri existem oito secções e cada indivíduo pertence a uma só secção. As regras de casamento, obrigações e rituais dependem rigidamente da secção a que cada indivíduo pertence

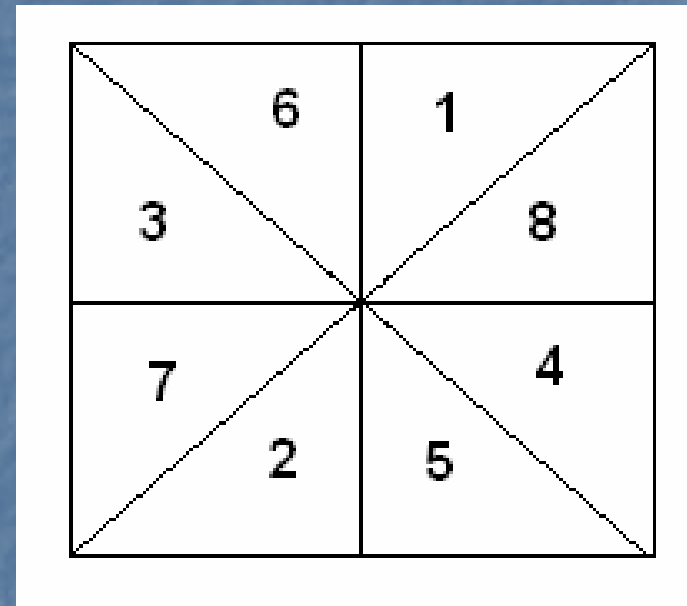


As relações de parentesco dos Warlpiri

Desenhemos as 8 secções dos Warlpiri
doutro modo



Ou como partes dum quadrado

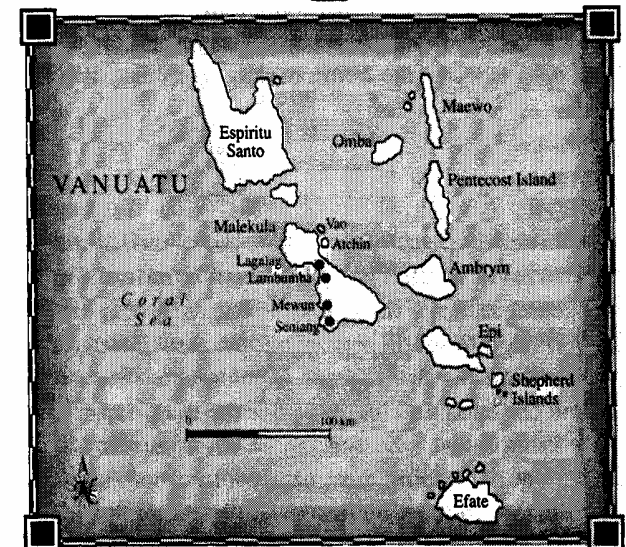
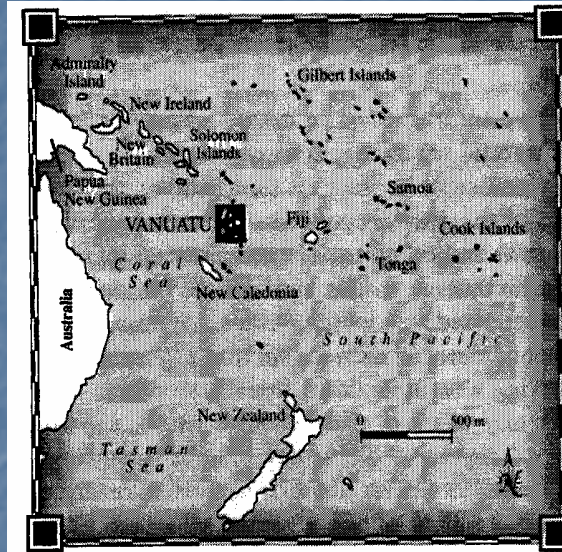


Casamentos são reflexões e a secção a que cada recém-nascido vai pertencer é obtida por rotação.

Portanto as relações de parentesco dos Warlpiri são o grupo D4

As relações de parentesco dos Warlpiri

- Em Vanuatu os Malekula utilizam D3, o grupo de simetria do triângulo
- Num caso e noutro as relações de parentesco mostram uma psicologia social que liga passado e presente dum modo cíclico. Bastante diferente da nossa que se baseia numa estrutura de árvore (numeração ultramétrica)



As relações de parentesco dos Warlpiri

TPC 6

Quais são os geradores do grupo de simetrias do triângulo (D_3)?

Quantos elementos tem?

Construa o diagrama de Cayley para o grupo de simetria do triângulo (isto é o diagrama das relações de parentesco dos Malekula)

Grupos e a estrutura das leis físicas

A – Invariâncias e quantidades conservadas

A invariância para transformações está associada à existência de quantidades conservadas

(Nota: no sentido laboratorial, invariância refere-se a uma situação em que se dá a mesma transformação ao sistema a medir e aos aparelhos de medida)

- 1) Invariância para translações no tempo
→ Conservação da energia
- 2) Invariância para translações no espaço
→ Conservação do momento linear (quantidade de movimento) (mv)
- 3) Invariância para rotações
→ Conservação do momento angular $\times [X] \text{ m v}$
[X] = produto externo de vectores

Grupos e a estrutura das leis físicas

A – Invariâncias e quantidades conservadas

Exemplo: Corpos com forças de interacção potencial

$$m_i \, d^2x_i/dt^2 = \sum_k F_{ik}(x_i, x_k, t) = - \sum_k \partial U(x_i, x_k, t)/\partial x_i$$

- Invariância para translações no tempo

$$t \rightarrow t + \beta ; F_{ik}(x_i, x_k, t) = F_{ik}(x_i, x_k, t + \beta) \rightarrow F_{ik} = F_{ik}(x_i, x_k)$$

- Invariância para translações no espaço

$$x \rightarrow x + \alpha ; F_{ik}(x_i, x_k) = F_{ik}(x_i + \alpha, x_k + \alpha) \rightarrow F_{ik} = F_{ik}(x_i - x_k)$$

- Invariância para rotações

$$m_i \, d^2Rx_i/dt^2 = \sum_k F_{ik}(Rx_i - Rx_k) \\ \rightarrow F_{ik}(Rx_i - Rx_k) = RF_{ik}(x_i - x_k) \rightarrow U = U(|x_i - x_k|)$$

A – Invariâncias e quantidades conservadas

Quantidades conservadas :

- Energia (transl. tempo)

$$\sum_i (dx_i/dt) (m_i d^2x_i/dt^2 + \partial U/\partial x_i) = 0$$

$$d/dt \{1/2 \sum_i m_i (dx_i/dt)^2 + U\} = 0$$

- Momento linear (transl. espaço) $P = \sum_i m_i dx_i/dt$

$$d/dt P = \sum_i m_i d^2x_i/dt^2 = - \sum_{i \neq k} \partial U(x_i - x_k)/\partial x_i = 0$$

- Momento angular (rotações) $M = \sum_i x_i [X] (m_i dx_i/dt)$

$$d/dt M = \sum_i dx_i/dt [X] (m_i dx_i/dt) + \sum_i x_i [X] d^2x_i/dt^2$$

$$= \sum_i x_i [X] \sum_{k \neq i} F_{ik} = 0$$

$$x_i [X] F_{ik} + x_k [X] F_{ki} = (x_i - x_k) [X] F_{ik} = 0$$

porque F_{ik} é paralelo a $(x_i - x_k)$

B – As transformações do espaço-tempo

As invariâncias para translações no espaço, no tempo e rotações são *um dado experimental*. A existência de quantidades conservadas é uma consequência matemática.

Outro dado experimental : equivalência de referenciais de inércia (nada se sente num elevador em movimento uniforme)

Invariância para translações (homogeneidade)+ rotações (isotropia) + equivalência de referenciais de inércia

Consequência matemática :

→ existência duma velocidade invariante (a mesma em todos os referenciais inerciais)

B – As transformações do espaço-tempo

Consequência matemática :

→ existência duma velocidade invariante (a mesma em todos os referenciais inerciais)

E por isso :

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2} \frac{x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$x^{1'} = -v \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Se $c = \infty \rightarrow$ Mecânica Clássica ($t' = t$; $x' = x - v t$)

Se c for finito \rightarrow Mecânica Relativista

→ A relatividade e as suas consequências “paradoxais” são uma consequência matemática de princípios simples e facilmente compreensíveis

B – As transformações do espaço-tempo

- Referenciais S e S' e coordenadas ξ e ξ'

$$\xi = (t, x^1, x^2, x^3) \text{ e } \xi' = (t', x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$$

- Transformação de coordenadas $\xi' = f(\xi)$

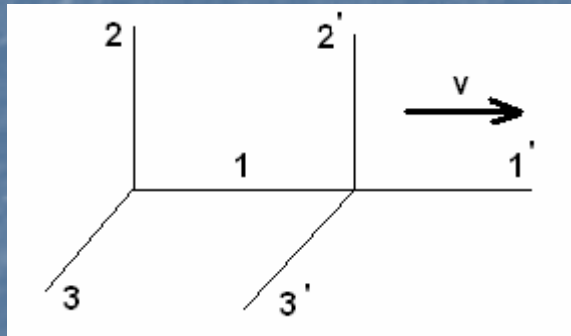
- Homogeneidade: translação a em S e a' em S'

$$f(\xi + a) = f(\xi) + a' \text{ implica } f \text{ linear}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

B – As transformações do espaço-tempo

- Consideremos transformações de velocidade com os eixos coincidentes no tempo $t=0$



Para $t=0$ pontos nos eixos 1,2, 3 deverão permanecer nos eixos 1',2',3'

$$\begin{pmatrix} t' \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{30} & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

B – As transformações do espaço-tempo

- Consideremos a diferença de coordenadas de 2 acontecimentos, sendo estes as coordenadas de uma partícula em repouso em relação a S'

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{30} & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ v\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a_{20} = a_{30} = 0 \quad \text{e} \quad a_{10} = -v a_{11}$$

- Se a partícula estiver em repouso em S deverá ter velocidade $-v$ em relação a S'

$$\rightarrow \Delta x^{1'} = -v \Delta t' \rightarrow a_{10} = -v a_{00} \rightarrow a_{11} = a_{00}$$

B – As transformações do espaço-tempo

- Isotropia exige $a_{02} = a_{03}$ porque nada permite distinguir as direcções 2 e 3. Por outro lado

$$t' = a_{00} t + a_{01} x^1 + a_{02} (x^2 + x^3)$$

→ $a_{02} = a_{03} = 0$ porque t' não deverá depender duma rotação em torno do eixo 1.

Resumindo : Uma transformação de velocidade na direcção 1 deve ter a forma

$$t' = a_{00}(v)t + a_{01}(v)x^1$$

$$x^{1'} = -va_{00}(v)t + a_{00}(v)x^1$$

$$x^{2'} = a_{22}(v)x^2$$

$$x^{3'} = a_{22}(v)x^3$$

B – As transformações do espaço-tempo

- Aplicando agora a equivalência de referenciais

$$t = a_{00}(-v)t' + a_{01}(-v)x^{1'}$$

$$x^1 = va_{00}(-v)t' + a_{00}(-v)x^{1'}$$

$$x^2 = a_{22}(-v)x^{2'}$$

$$x^3 = a_{22}(-v)x^{3'}$$

Por outro lado invertendo $\xi' = f(\xi)$

$$t = \frac{1}{a_{00}(v) + va_{01}(v)}t' + \frac{-a_{01}(v)}{a_{00}(v)[a_{00}(v) + va_{01}(v)]}x^{1'}$$

$$x^1 = \frac{v}{a_{00}(v) + va_{01}(v)}t' + \frac{1}{a_{00}(v) + va_{01}(v)}x^{1'}$$

$$x^2 = \frac{1}{a_{22}(v)}x^{2'}$$

$$x^3 = \frac{1}{a_{22}(v)}x^{3'}$$

B – As transformações do espaço-tempo

- Igualando os coeficientes

$$a_{00}(-v) = \frac{1}{a_{00}(v) + va_{01}(v)}$$

$$a_{01}(-v) = -\frac{a_{01}(v)}{a_{00}(v)} a_{00}(-v)$$

$$a_{22}(-v) = \frac{1}{a_{22}(v)}$$

e usando isotropia

$$\begin{pmatrix} t' \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}(v) & \frac{1}{v} \left(\frac{1}{a_{00}} - a_{00} \right) & 0 & 0 \\ -va_{00}(v) & a_{00}(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

B – As transformações do espaço-tempo

- Considerando transformações $S \rightarrow S' \rightarrow S''$

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}(v)a_{00}(v') - \frac{v'}{v}a_{00}(v')\left(\frac{1}{a_{00}(v)} - a_{00}(v)\right) & \frac{a_{00}(v)}{v'}\left(\frac{1}{a_{00}(v')} - a_{00}(v')\right) + \frac{a_{00}(v')}{v}\left(\frac{1}{a_{00}(v)} - a_{00}(v)\right) \\ -va_{00}(v)a_{00}(v') - v'a_{00}(v)a_{00}(v') & a_{00}(v)a_{00}(v') - \frac{v}{v'}a_{00}(v)\left(\frac{1}{a_{00}(v')} - a_{00}(v')\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Para ter a mesma forma (equivalência de referenciais)

$$\frac{v'}{v}a_{00}(v')\left(\frac{1}{a_{00}(v)} - a_{00}(v)\right) = \frac{v}{v'}a_{00}(v)\left(\frac{1}{a_{00}(v')} - a_{00}(v')\right)$$

B – As transformações do espaço-tempo

- Onde

$$\frac{1}{v^2} \left(1 - \frac{1}{a_{00}^2(v)} \right) = \frac{1}{v'^2} \left(1 - \frac{1}{a_{00}^2(v')} \right) = K = \frac{1}{c^2}$$

isto é, existe uma constante universal com as dimensões do quadrado duma velocidade

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2} \frac{x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$x^{1'} = -v \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Transformações de Lorentz

B – As transformações do espaço-tempo

- Consequências

- 1) Caso $c=\infty$, transf. de Galileu, mecânica clássica
- 2) Se $c\neq\infty$ (caso genérico), tempo não é absoluto
- 3) Contração dos comprimentos, dilatação do tempo
- 4) Consequências pouco óbvias de princípios simples com fundamento experimental.
- 5) Verificações experimentais :
 - Muões
 - Relógios viajando à volta da terra
 - etc.

B – As transformações do espaço-tempo

TPC 7 O “paradoxo dos gémeos”

Pedro e Paulo são gémeos com 21 anos, nascidos no ano 3021.

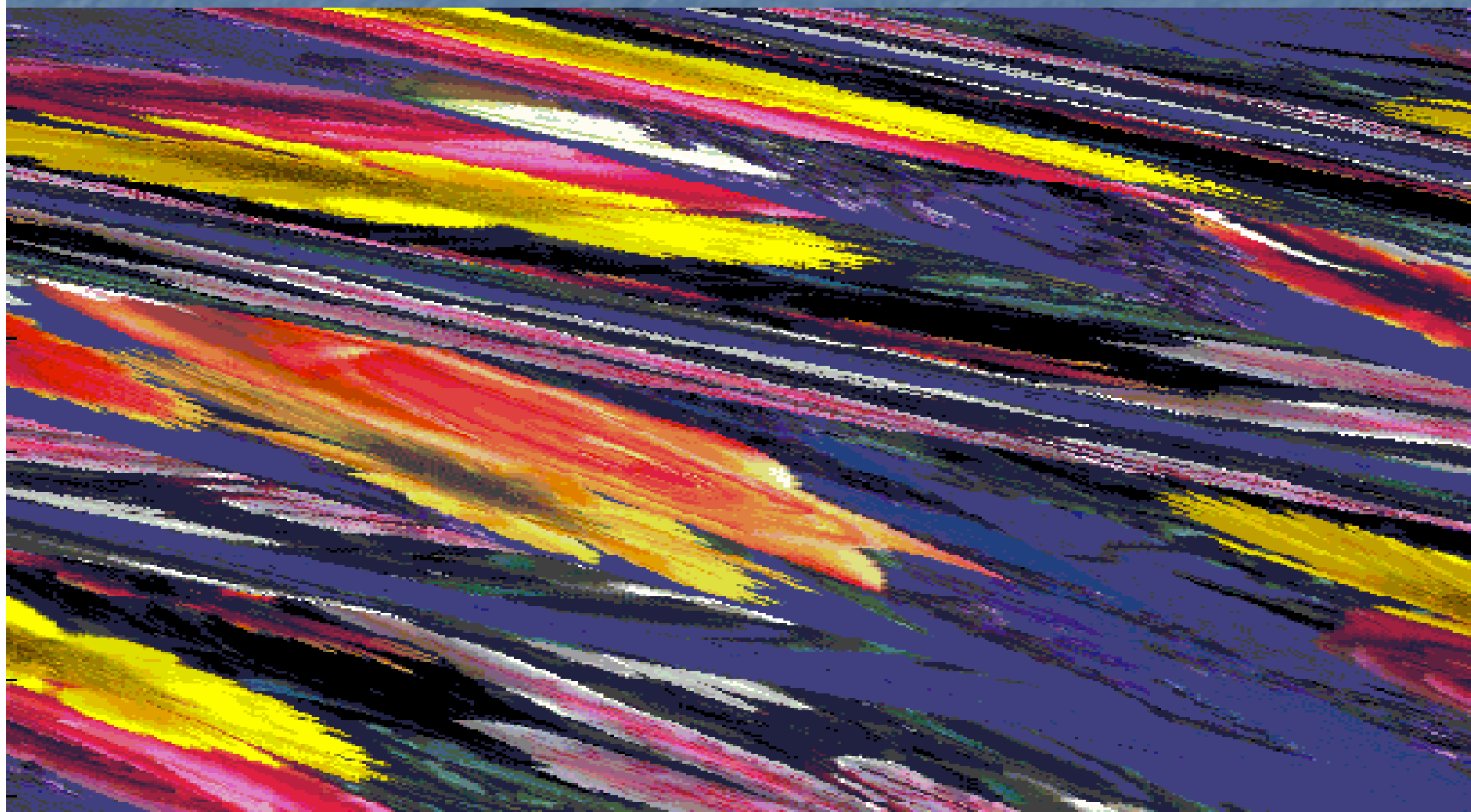
1) Pedro embarca numa nave e viaja durante sete anos à velocidade uniforme de $v=(24/25)c$. Ao fim desses anos inverte o sentido e regressa à Terra nos sete anos seguintes.

Que idade têm Pedro e Paulo quando se encontram ?

2) Como se explica que um raciocínio simétrico não está correcto ?



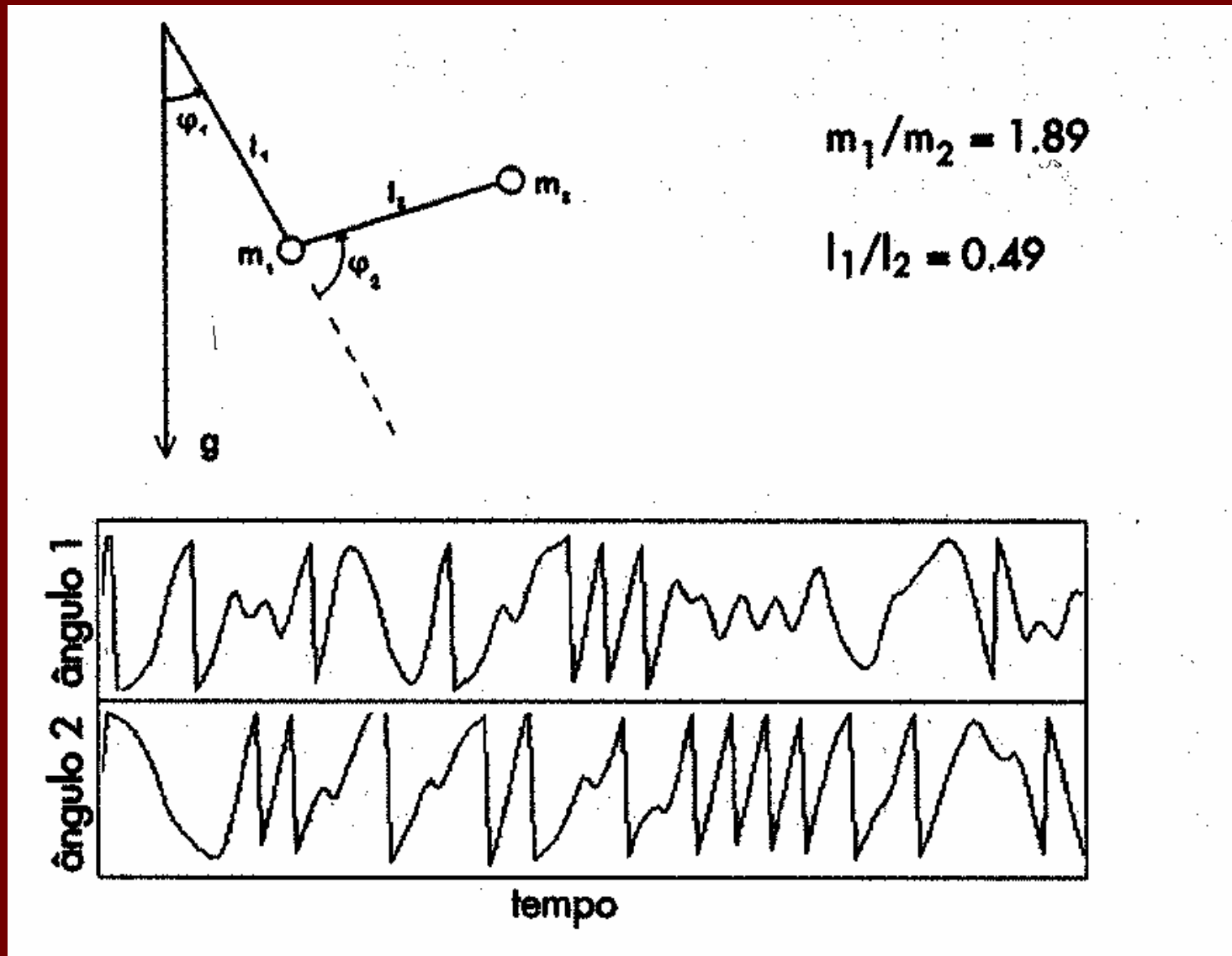
Fim da terceira aula



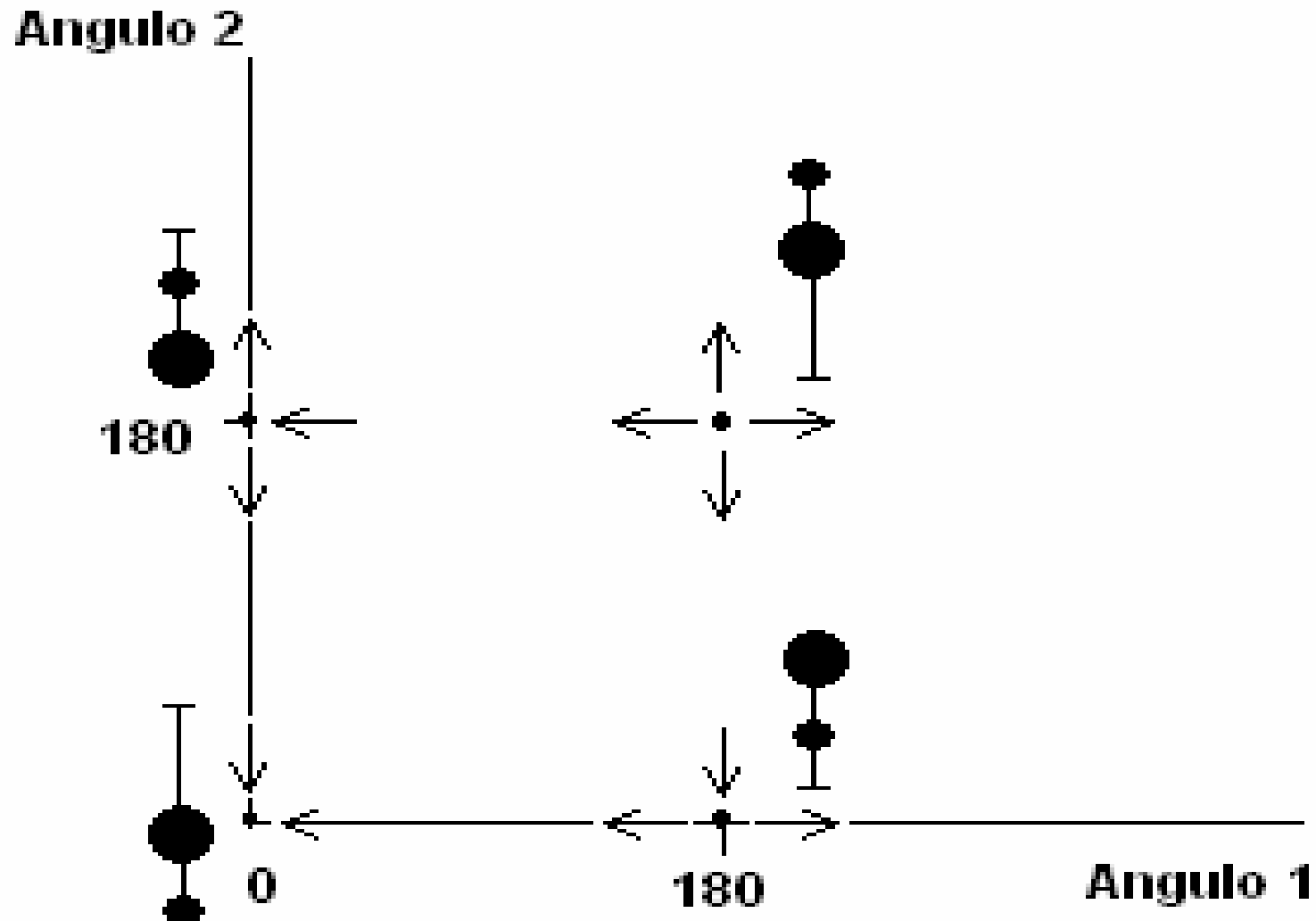
4 – Caos e dependência sensível

- chaos\2 Double Pendulum C.mp4
- Como vimos no filme, em certas circunstâncias o pêndulo duplo tem um movimento regular e noutras tem uma dinâmica bastante complexa e praticamente imprevisível.
- A irregularidade do seu movimento é bastante evidente se registarmos a evolução dos ângulos (ver figura no slide seguinte)
- Regularidade previsível e irregularidade imprevisível. Porquê ?

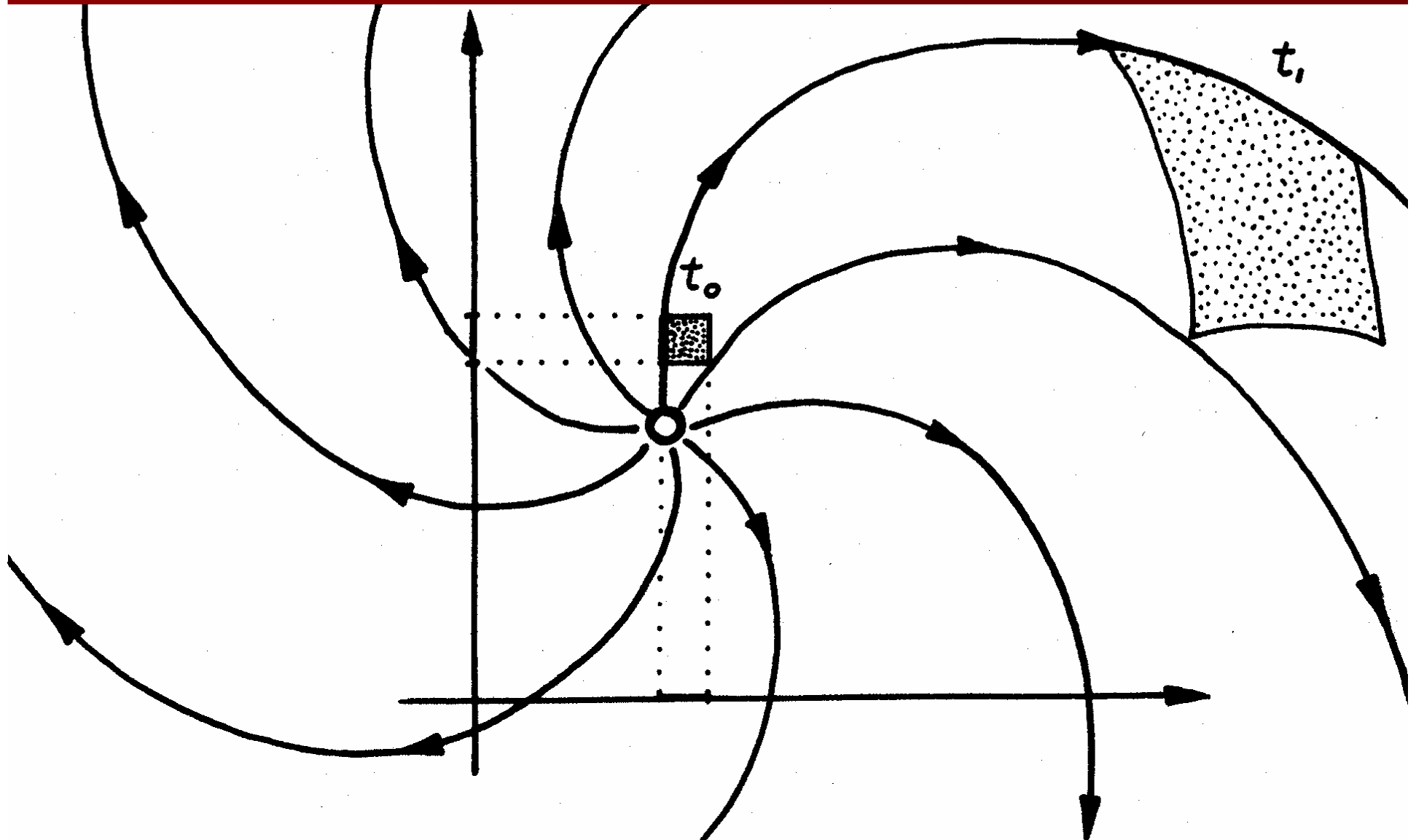
4 – Caos e dependência sensível



Os pontos fixos organizam o movimento



A origem do comportamento complexo



A origem do comportamento complexo

- É a rápida divergência das trajectórias, que amplifica os pequenos erros da condição inicial, e torna o movimento (mesmo que teoricamente determinista) praticamente imprevisível para além de um periodo de tempo muito curto.
- Se o modelo teórico for incompleto, a situação é ainda pior (os valores das variáveis desconhecidas actuam como erros). É o caso dos modelos do clima.
- No estudo do caos determinista há dois marcos históricos importantes :
 - O trabalho de Poincaré no problema de três corpos.
 - O modelo de Lorenz da teoria do clima.

A origem do comportamento complexo

- O modelo de Lorenz

$$dx/dt = s (y - x)$$

$$dy/dt = r x - y - x z$$

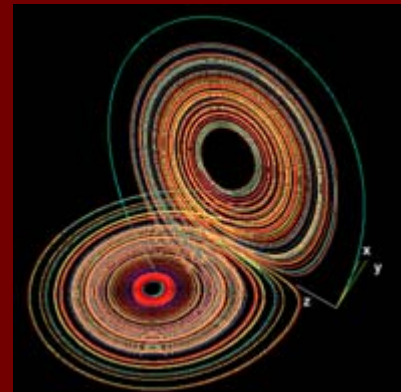
$$dz/dt = -b z + x y$$

- Exemplo :

$$s = 10$$

$$r = 28$$

$$b = 8/3$$



- O efeito borboleta

- ver animação :

www.exploratorium.edu/complexity/java/lorenz.html

- [temp\Lorenz Butterfly.htm](#)

Descrição quantitativa do comportamento complexo. Os expoentes de Lyapunov

■

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log ||D_k f^n(x)u|| = \xi_i^{(k)}$$

- Os expoentes de Lyapunov definem a taxa média de expansão das trajectórias
- Ilustração do efeito dos expoentes de Lyapunov. Expansão das trajectórias = Perda de informação sobre o estado inicial
- O vaso de flores e as transformações elípticas e hiperbólicas

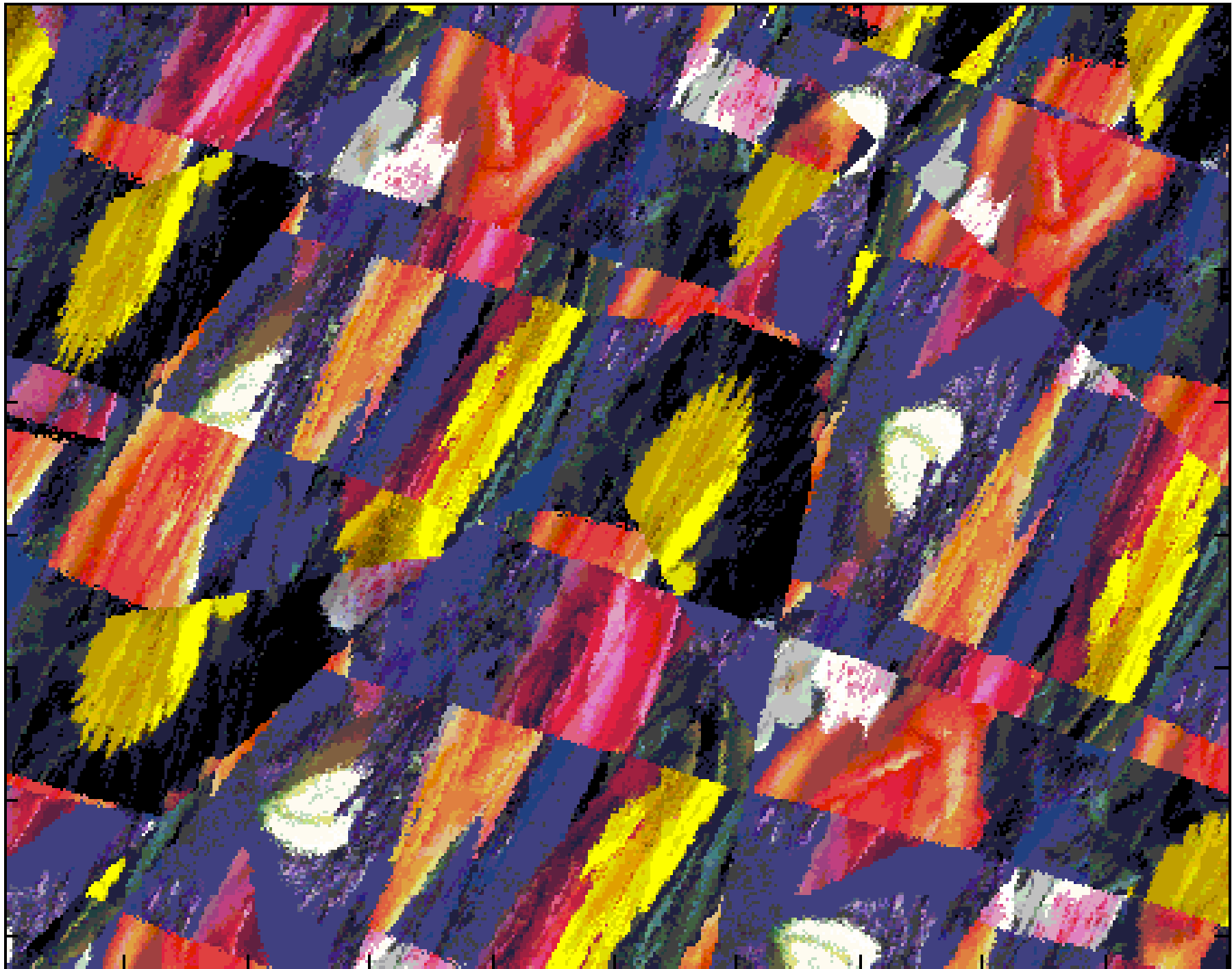


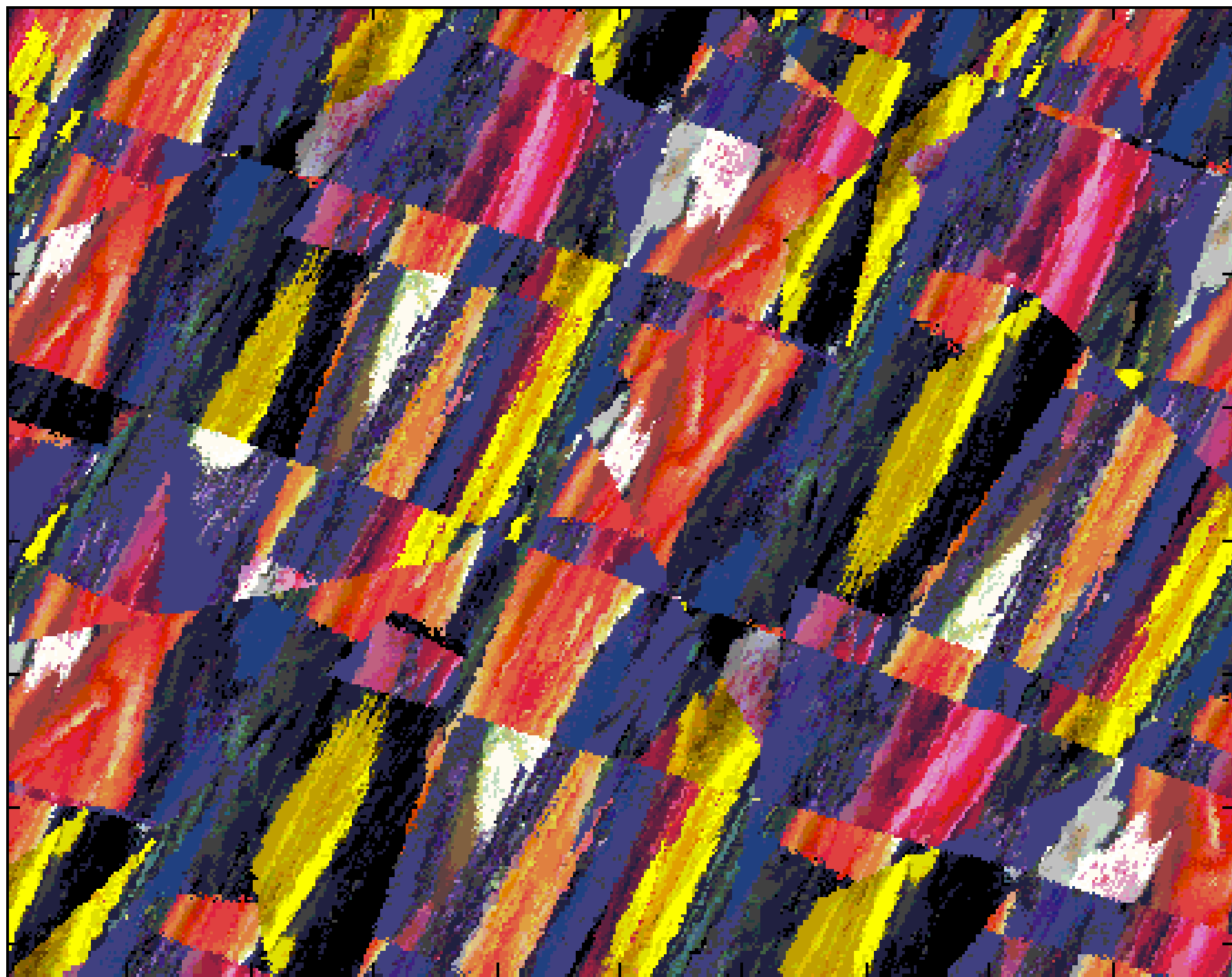
Transformação com uma matriz elíptica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$







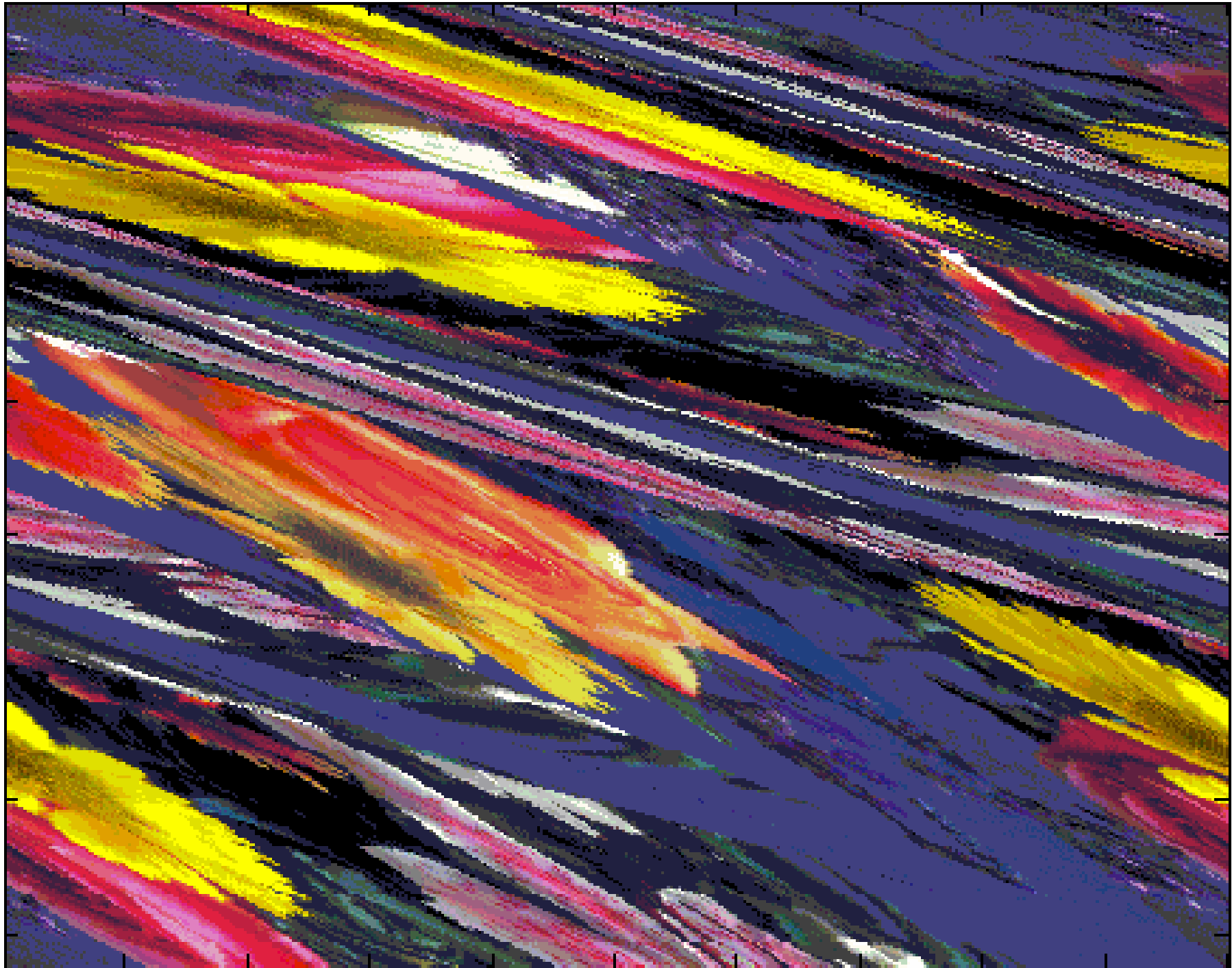


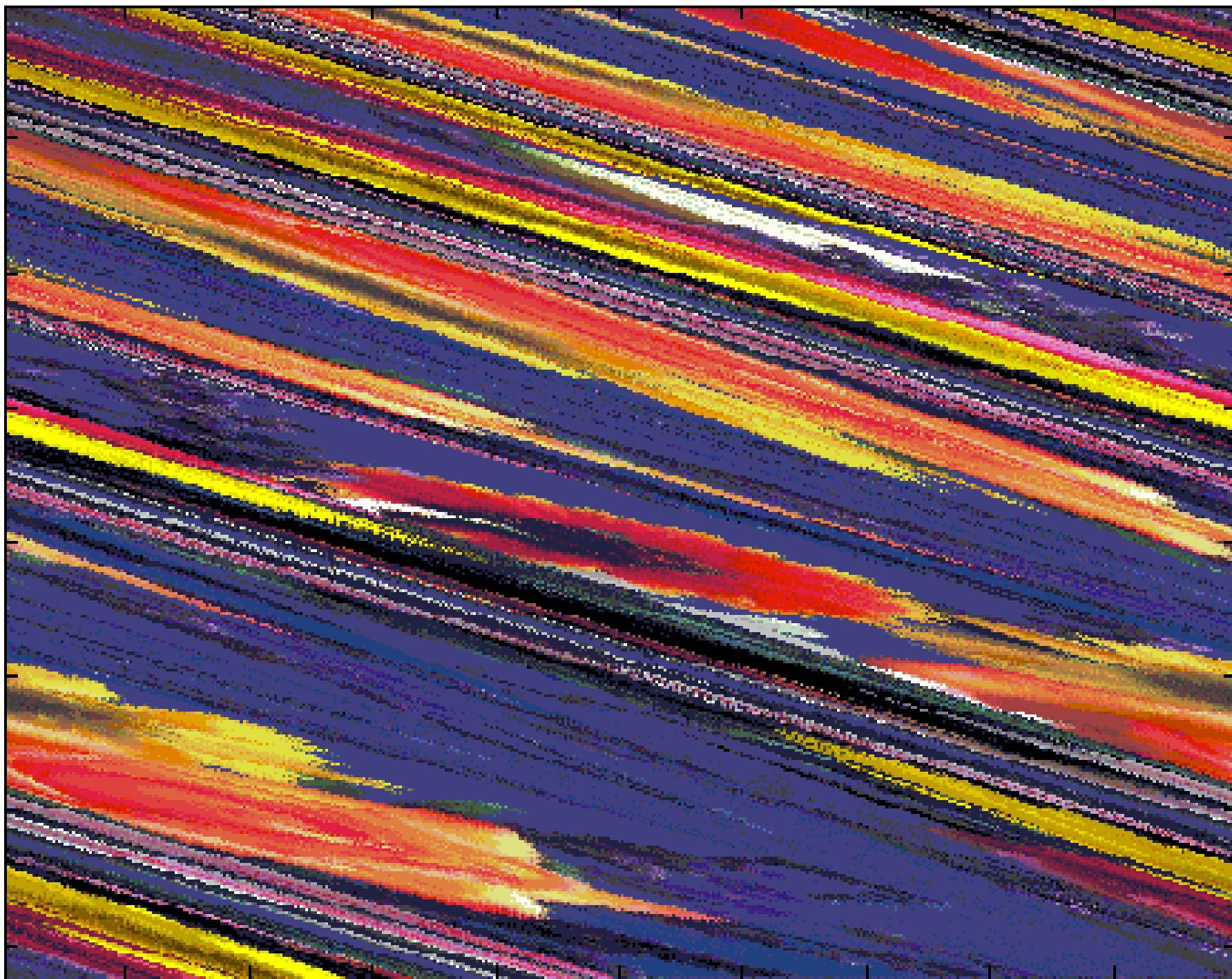


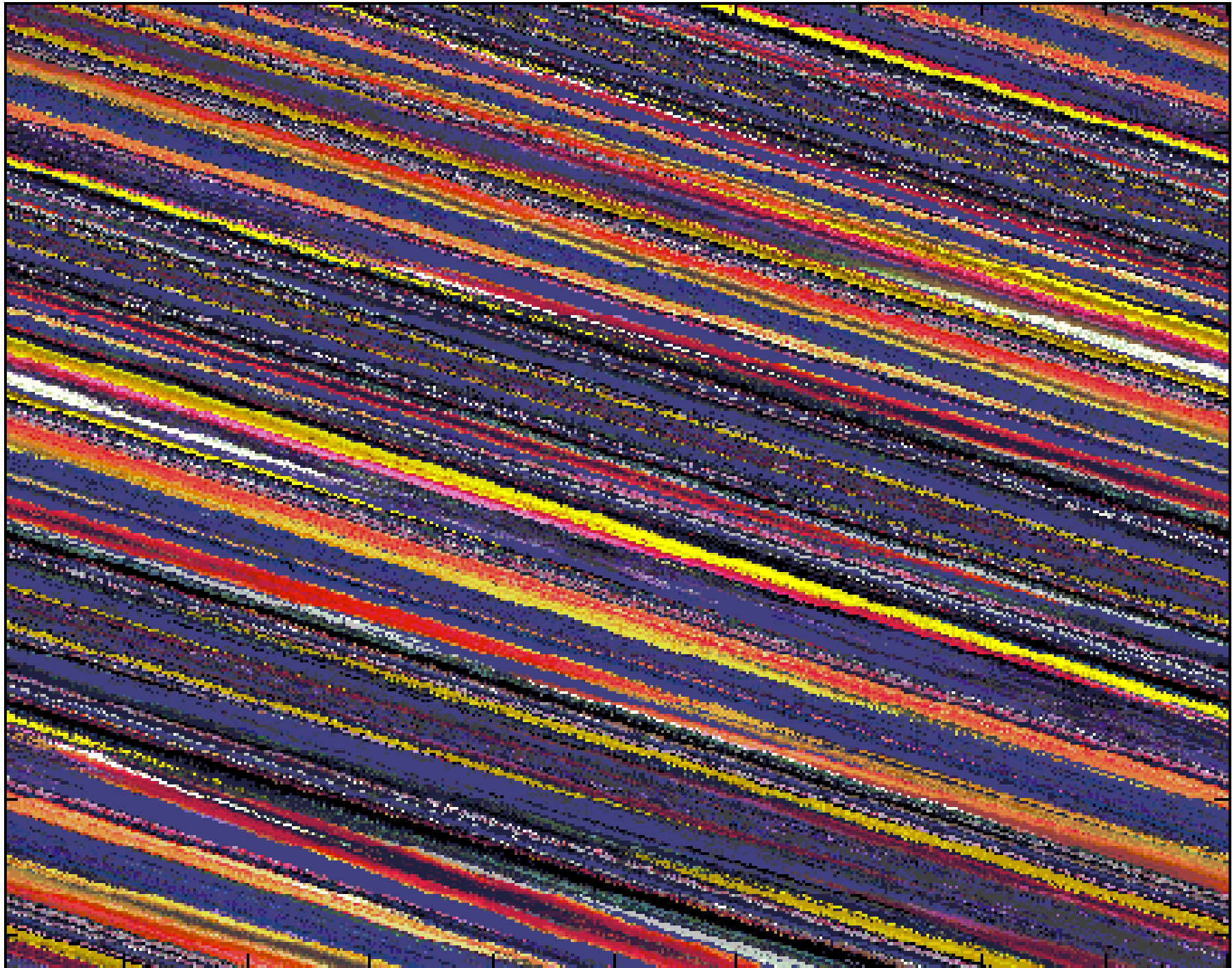
Transformação com uma matriz hiperbólica

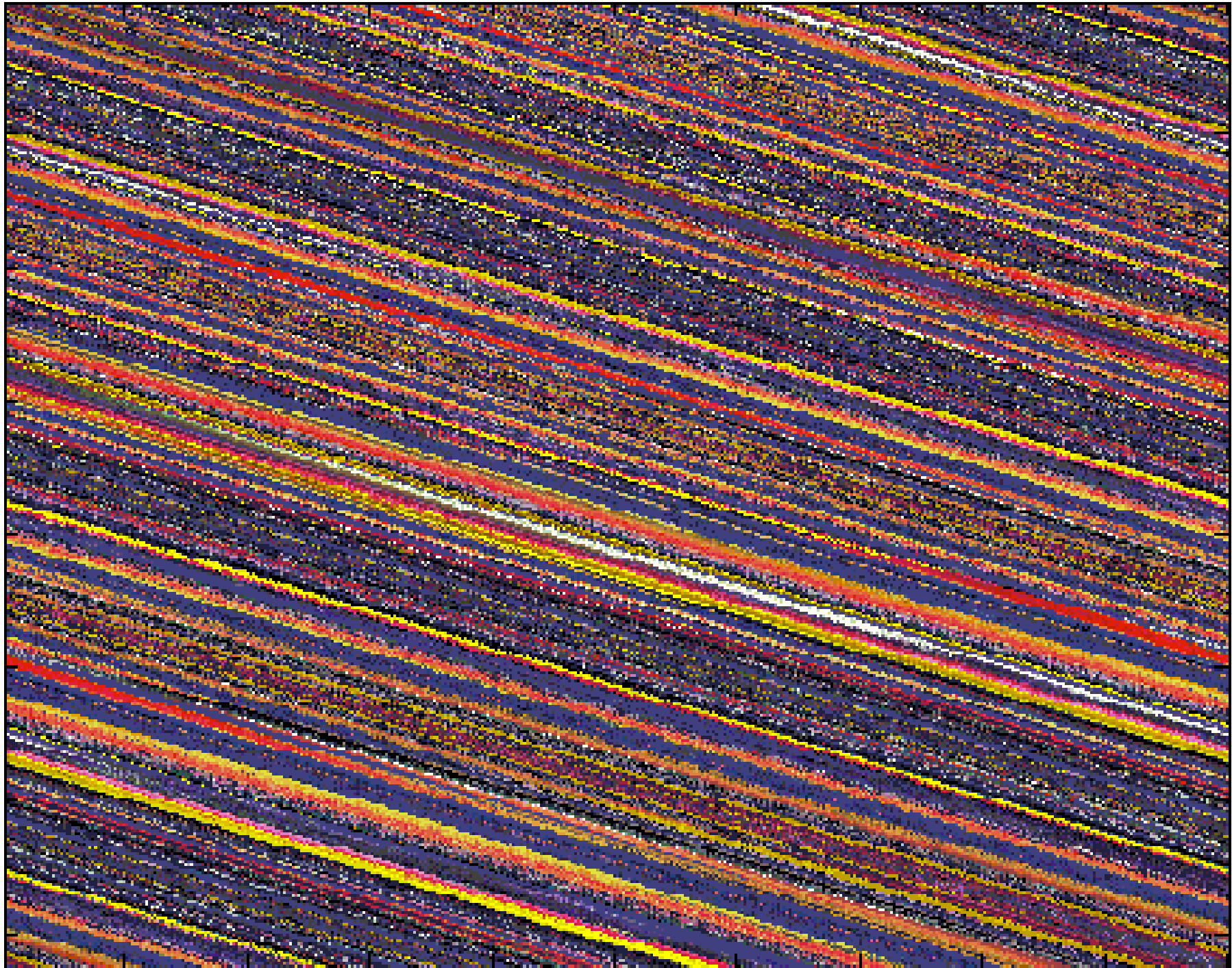
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

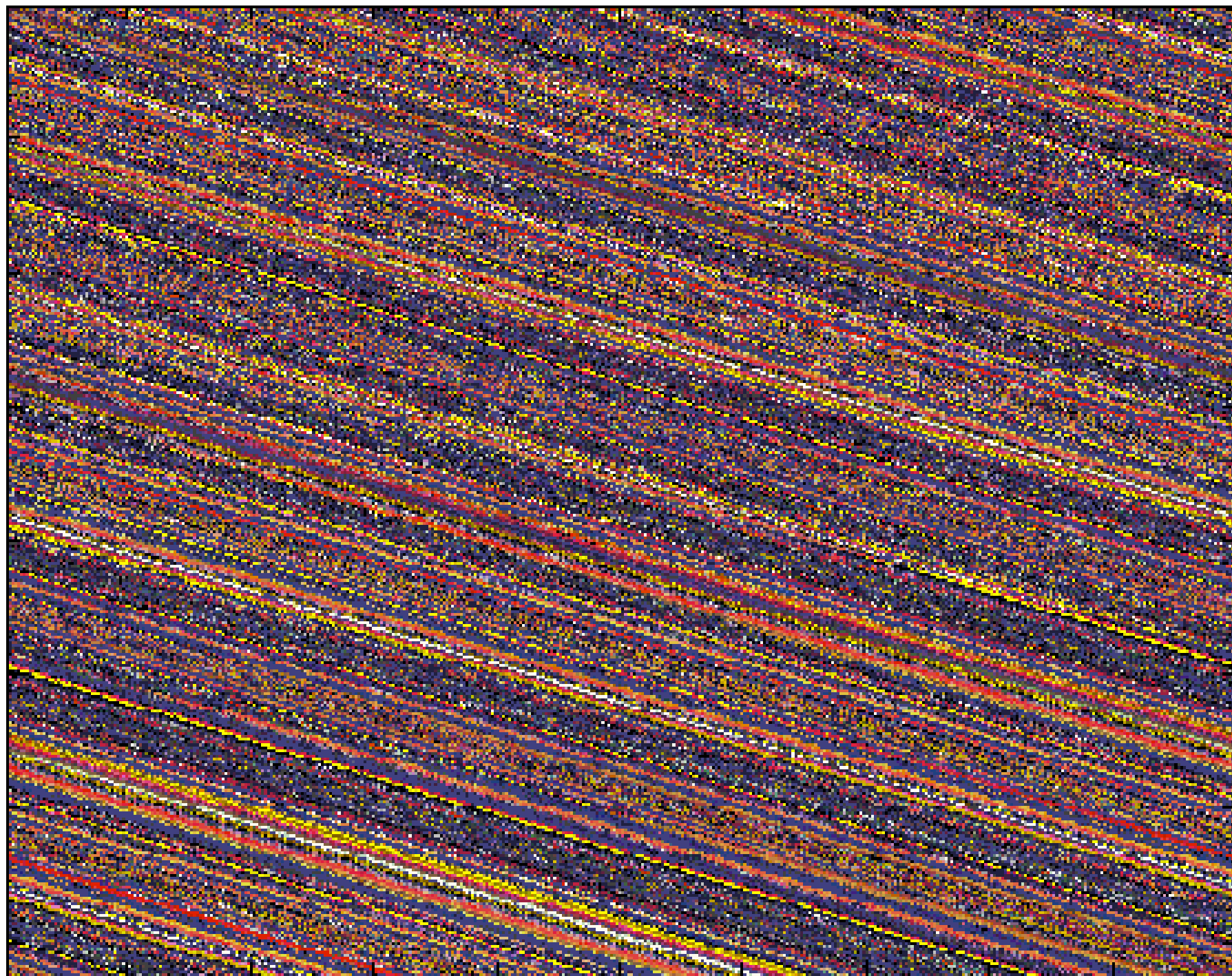












Os valores próprios das matrizes

■ Valores próprios de matrizes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(Rotação)

$$\lambda_1 = 0.7143 + i \, 0.6999$$

$$\lambda_2 = 0.7143 - i \, 0.6999$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.382$$

$$\lambda_2 = 2.618$$

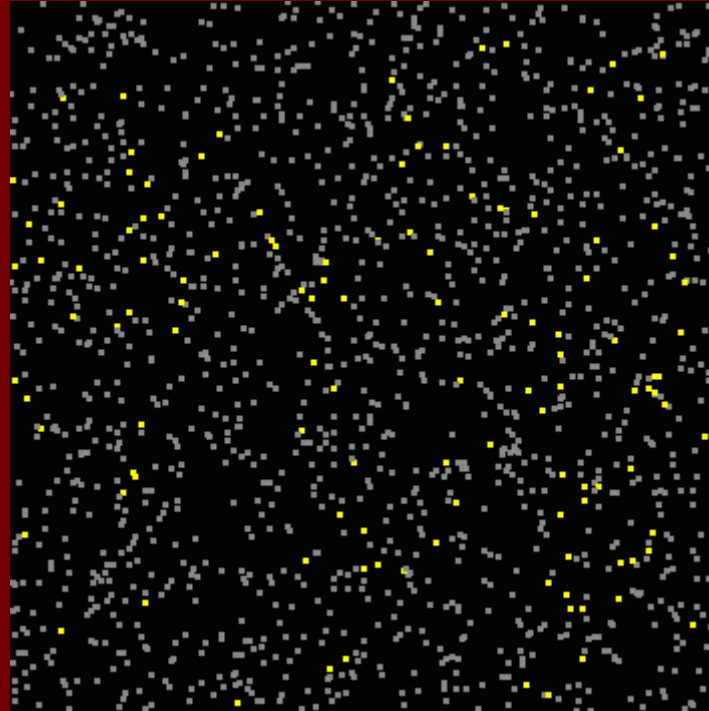
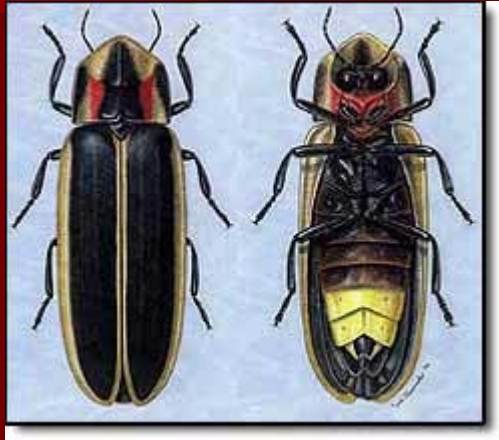
(Contração e expansão)

O valor descritivo dos expoentes de Lyapunov

- Os fenómenos de sincronização
- A criticalidade auto-organizada (leis sem escala dinâmica)

Sincronização e não só

- Piscar síncrono das “moscas” de fogo, células, modas,



Sincronização e não só

■ Sincronização : Um modelo

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \omega_i + \frac{k}{N-1} \sum_{j=1}^N f_\alpha(x_j - x_i)$$

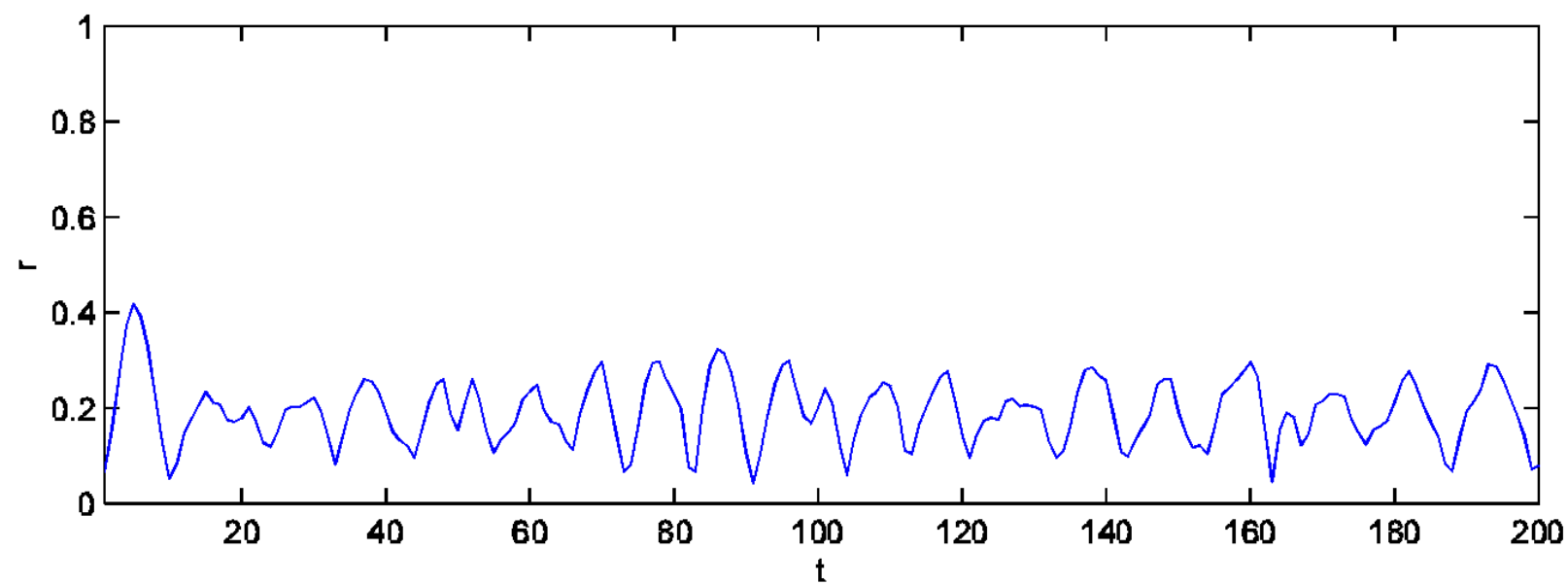
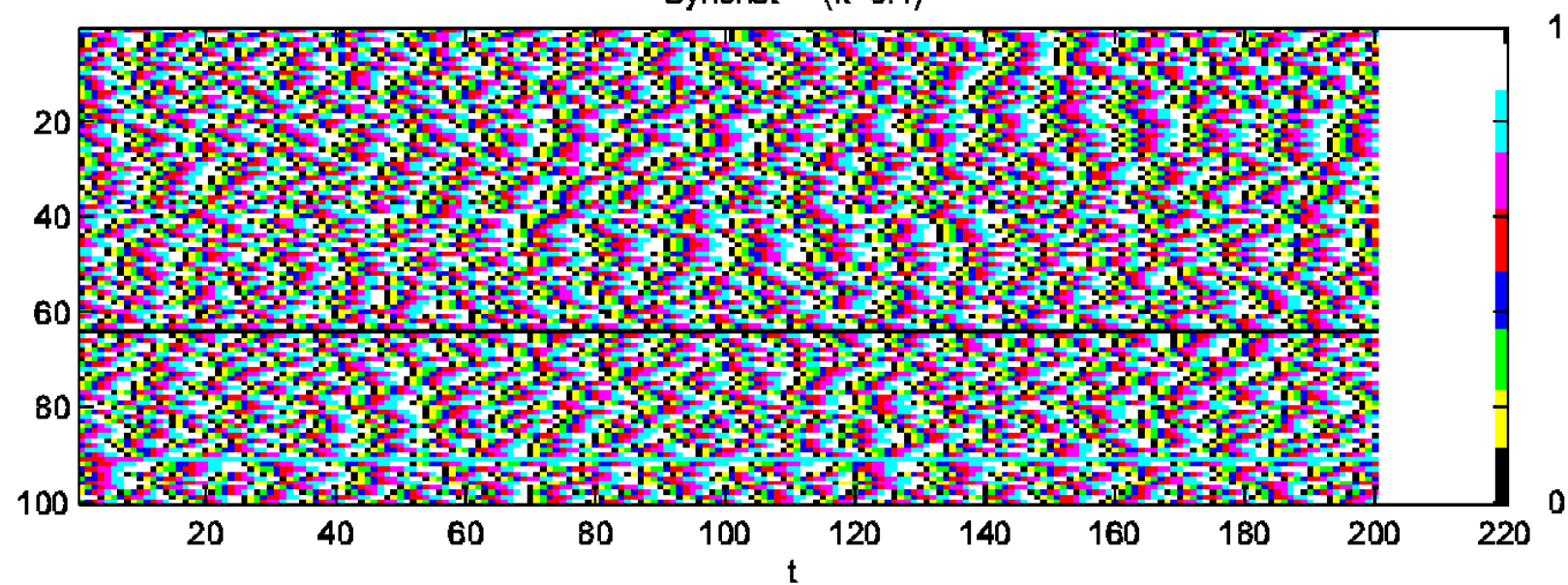
$$p(\omega) = \frac{\gamma}{\pi [\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2]}$$

$$f_\alpha(x_j - x_i) = \alpha(x_j - x_i) \pmod{1}$$

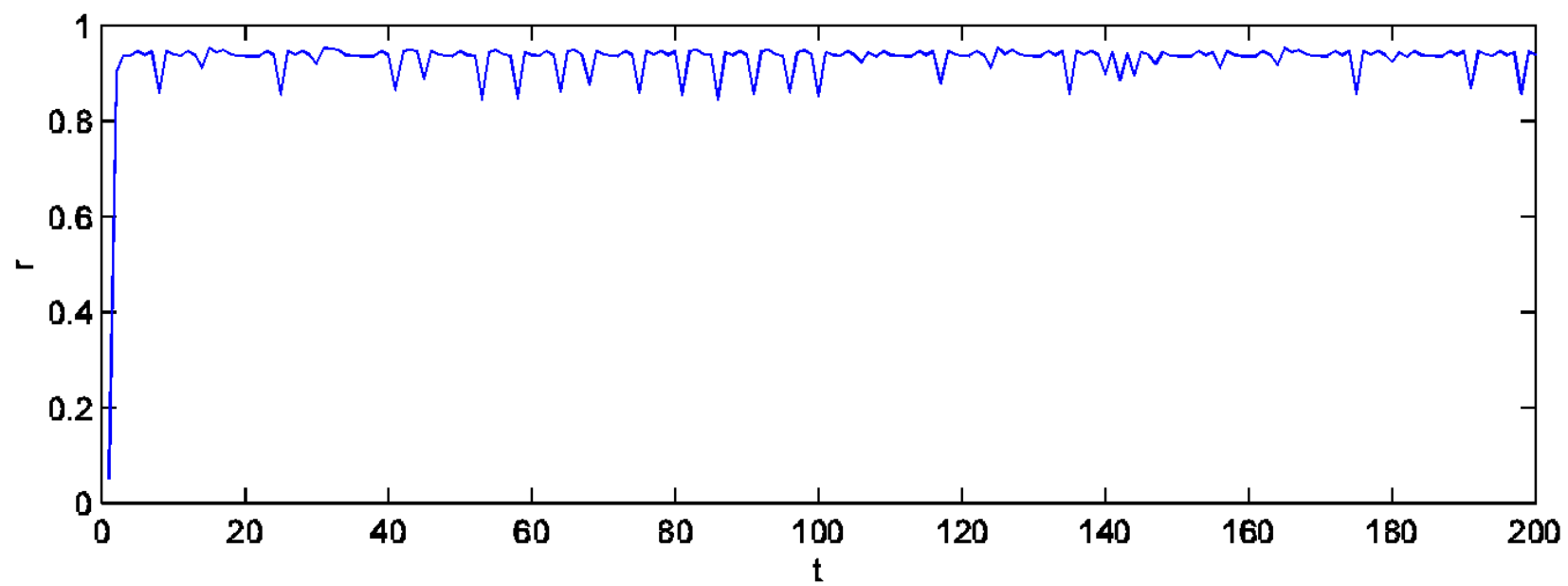
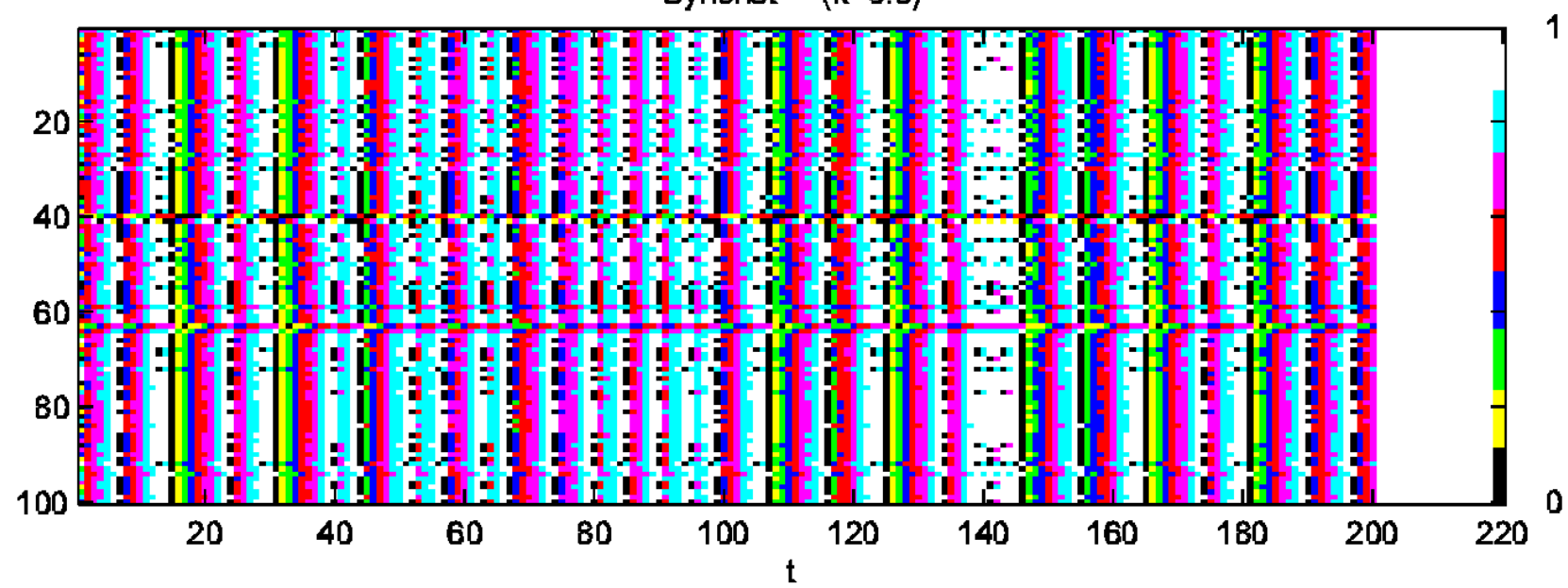
■ Parâmetro de ordem

$$r(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i2\pi x_j(t)} \right|$$

Syncnet (k=0.1)



Syncnet (k=0.8)



- Os espectro de Lyapunov controla a auto-organização dinâmica do sistema

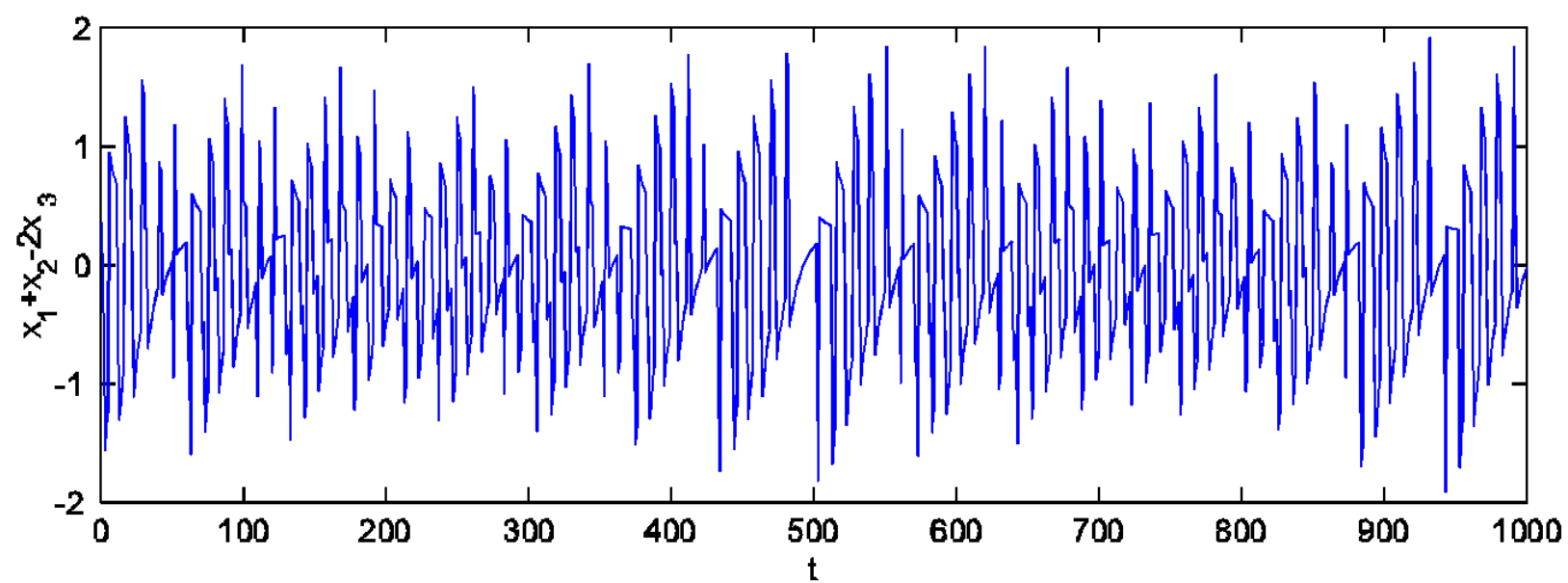
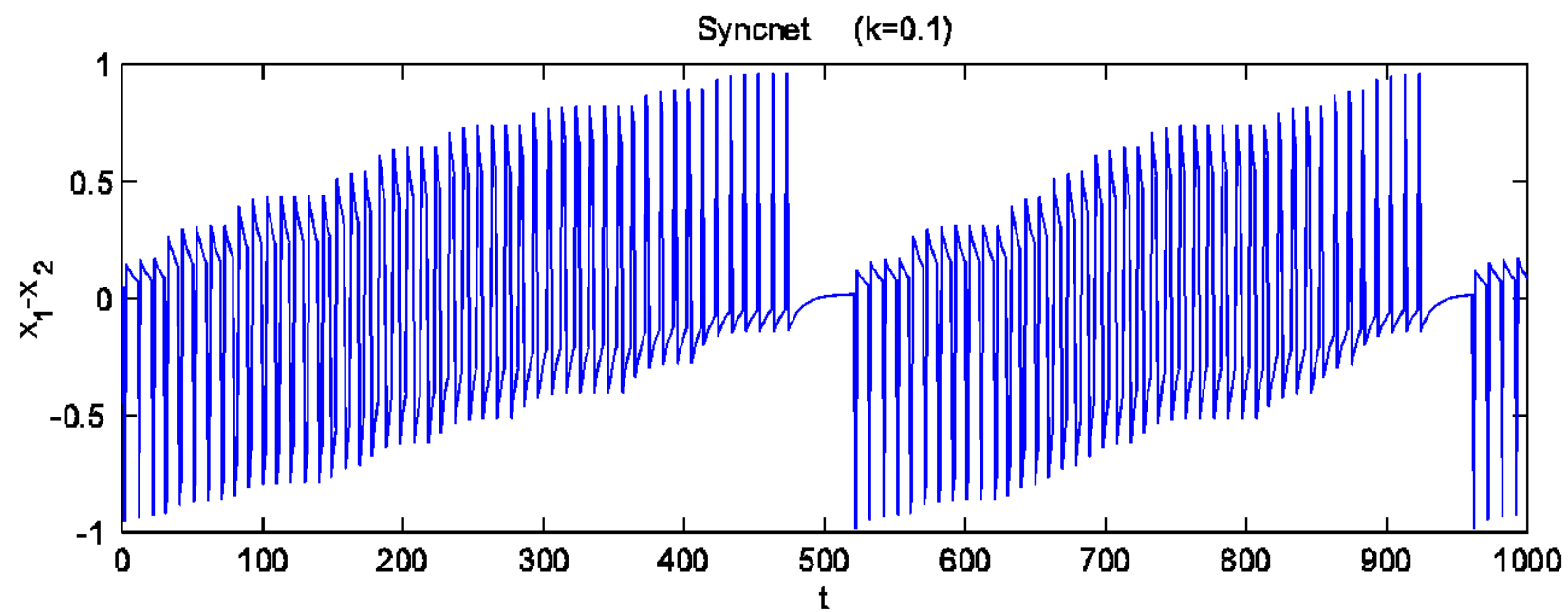
- Neste caso

$$\lambda_1 = 0 \text{ e}$$
$$\lambda_i = \log(1 - \alpha \lambda k(N/N-1)) \quad (N-1) \text{ vezes}$$

N-1 direcções de contração para qualquer $k \neq 0$

Do ponto de vista dinâmico é praticamente um sistema unidimensional !

- De facto há uma grande correlação das evoluções dinâmicas dos agentes para qualquer $k \neq 0$



Criticalidade auto-organizada (SOC) ou lei sem escala dinâmica

- Definição qualitativa:
SOC = mecanismo de acumulação lenta de energia e redistribuição rápida (avalanches) levando o sistema para um estado crítico, em que a distribuição (lei de probabilidade) das avalanches é uma lei de potência. Isto acontece sem que se tenha de ajustar nenhum parâmetro do modelo.
- Lei de potência → não existência duma escala característica, excitações de todas as intensidades.
- Inexistência de parâmetros ajustáveis ≠ dos pontos críticos das transições de fase
- Será o estado crítico um atrator ?
- Ocorrência frequente (geofísica, cosmologia, biologia evolutiva, ecologia, economia, sociologia, física do Sol, urbanismo ...)

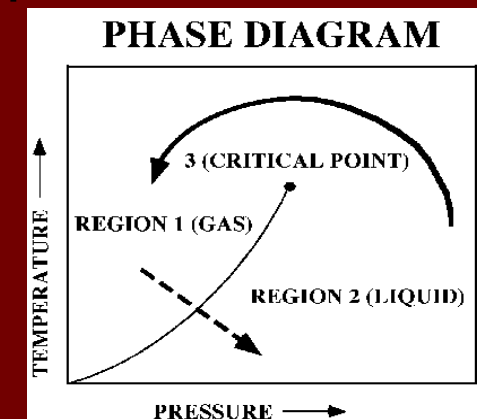
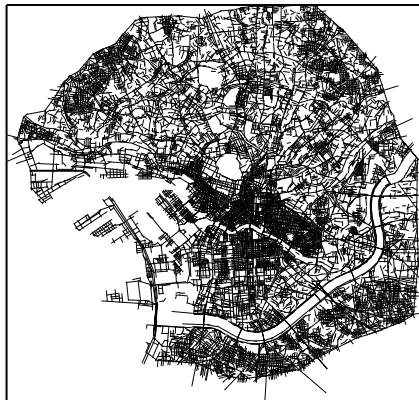


FIGURE 4

Mais um exemplo para além dos apresentados na lição 2. Urbanismo

- *Distribuição de espaços abertos em ambiente urbano (Carvalho e Penn, 2004)*

Tokyo



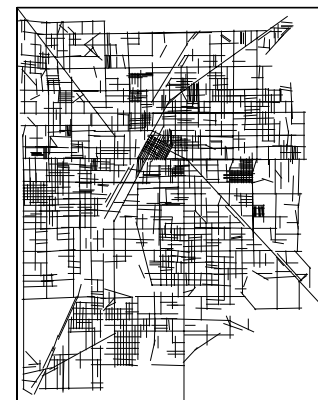
Bangkok

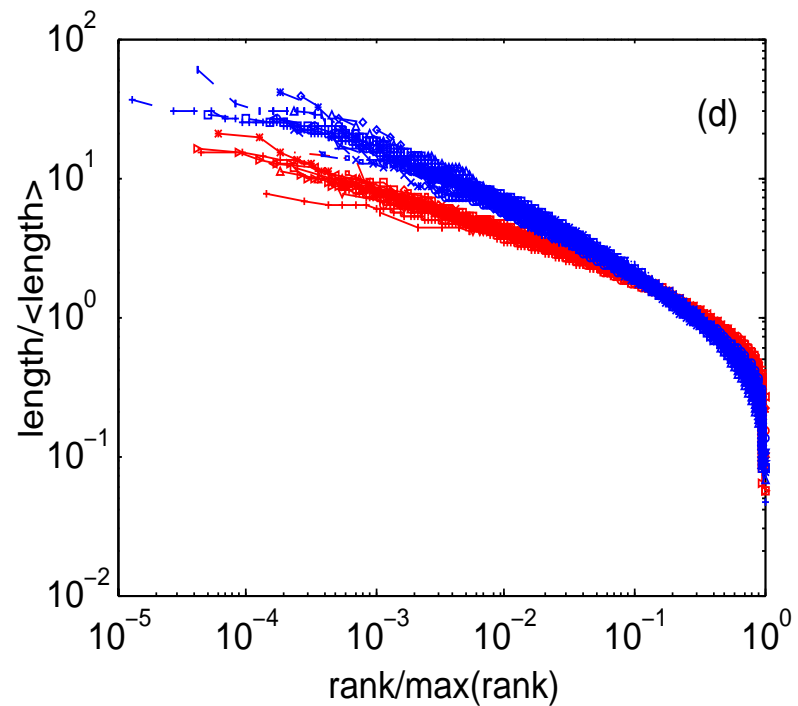
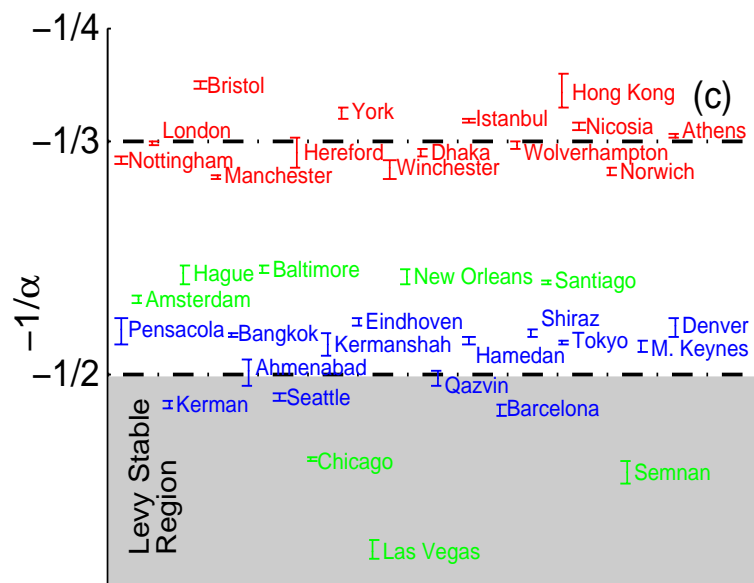
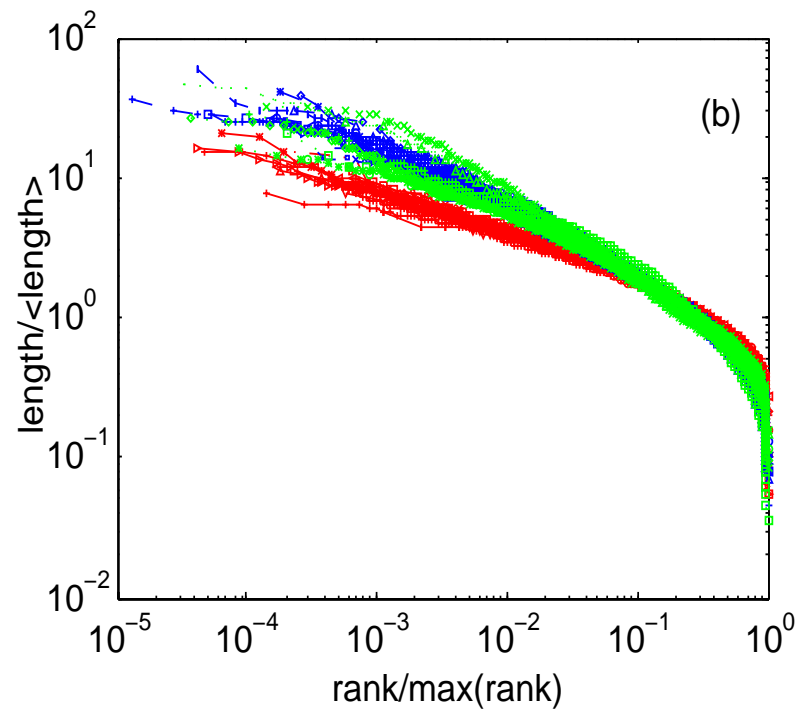
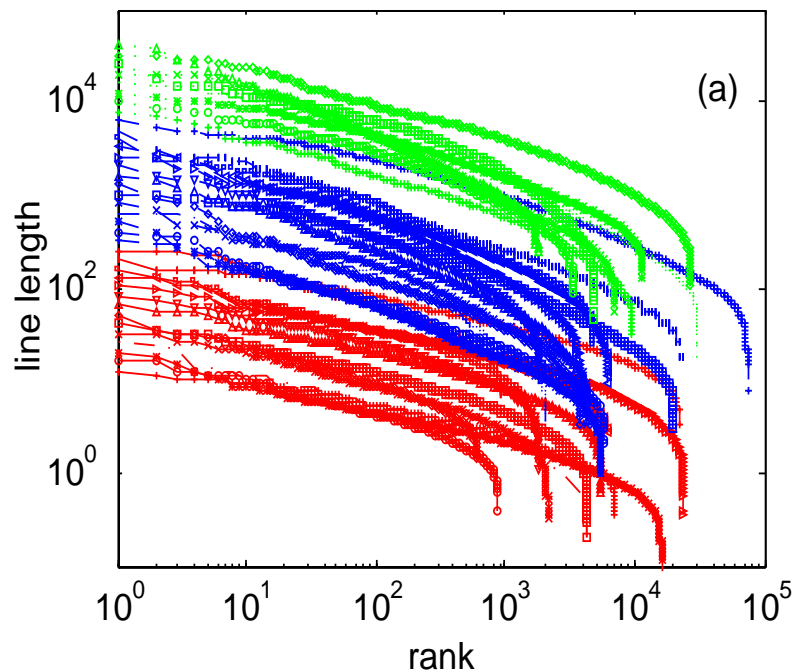
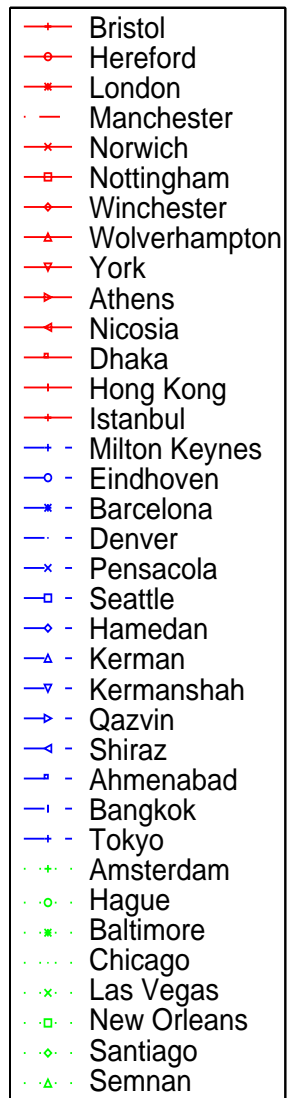


Athens



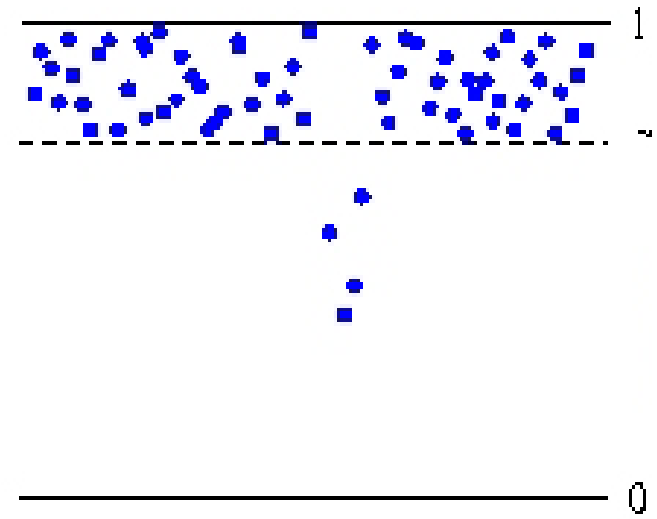
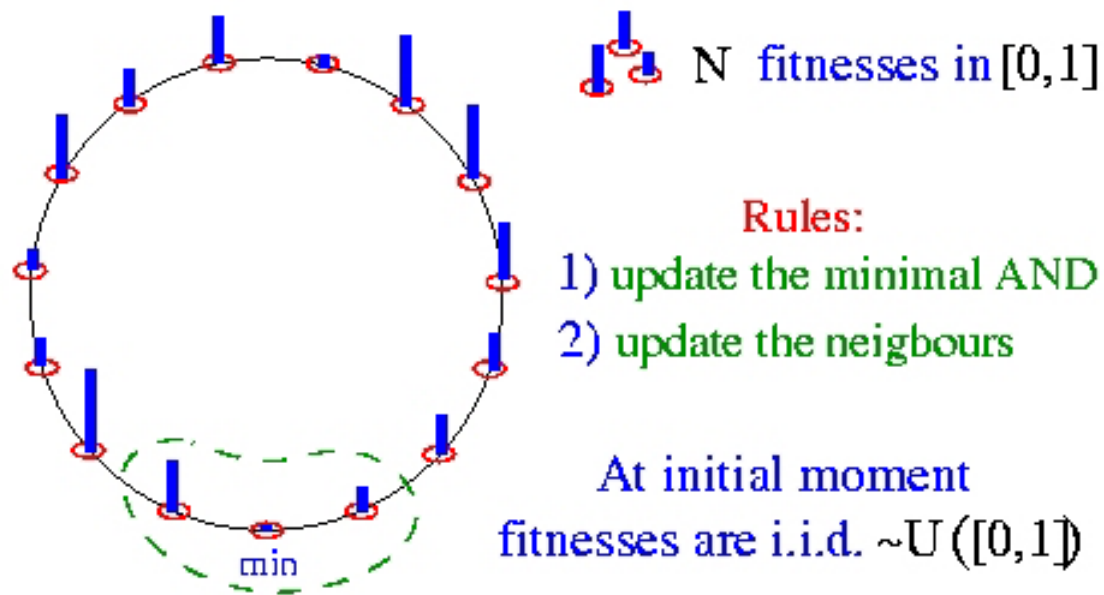
Las Vegas





O modelo de Bak-Sneppen

■ *Evolução das espécies*



■ *Dinâmica individual (exemplo)*

$x(t+1) = 2x \pmod{1}$ para o elemento crítico e os seus vizinhos

O modelo de Bak-Sneppen

- *Cálculo dos expoentes de Lyapunov*

Soc e o espectro de Lyapunov

- - Dinâmica local instável
- - Dinâmica extrema
- *Se, num modelo de N agentes :*
 - *A dinâmica individual dos agentes tem expoentes de Lyapunov positivos e*
 - *A dinâmica global é extrema com alcance finito**então, no limite $N \rightarrow \infty$, o espectro de Lyapunov converge para 0^+*
- No limite $T \rightarrow \infty$, usado para calcular o espectro de Lyapunov, na aplicação tangente cada bloco não trivial finito (de tamanho $2r+1$) existe apenas durante um tempo da ordem de $(2r+1)T/N$
- Com o espectro de Lyapunov a convergir para 0^+ não há quaisquer escalas dinâmicas características. Assim, no limite $N \rightarrow \infty$, o sistema torna-se do tipo SOC

Bibliografia



- C. Beck e F. Schlögl ; *Thermodynamics of chaotic systems*, Cambridge 1993
- E. T. Jaynes ; *Probability theory. The logic of science*, Cambridge 2003
- V. Arnold ; *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, MIR 1976
- G. B. West, J. H. Brown e B. J. Enquist ; *A general model for the origin of allometric scaling laws in biology*, *Science* 276 (1997) 122-126
- P. Bak ; *How Nature works*, Springer 1986
- D. Sornette ; *Critical Phenomena in Natural Sciences*, Springer 2000
- M. F. Barnsley ; *Fractals everywhere*, Academic Press 1993
- M. Ascher ; *Ethnomathematics : A multicultural view of mathematical ideas*
- M. Ascher ; *Mathematics Elsewhere : An exploration of ideas across cultures*, Princeton U. P. 2002
- E. F. Taylor e J. A. Wheeler ; *Spacetime physics*, Freeman 1966
- R. V. M. ; *Characterizing self-organization and coevolution by ergodic invariants*
Physica A 276 (2000) 550-571
- Structure generating mechanisms in agent-based models*, Physica A 295 (2001)
537-561
- Tools for network dynamics*, Int. J. Bifurcation and Chaos 15 (2005) 1185-1213
- Deterministic Bak-Sneppen model. Lyapunov spectrum and avalanches as return times*,
Physica D 214 (2006) 182-186



Fim

[http : // label 2 . ist . utl . pt / vilela /](http://label2.ist.utl.pt/vilela/)