Introdução à matemática financeira

R. Vilela Mendes
http://label2.ist.utl.pt/vilela/

Março 2010

Indíce

- Mercado e economia. Noções básicas
- Produtos financeiros
- Os derivados
- As fluctuações do mercado. Características gerais
- Um modelo de flutuações de mercado: O movimento Browniano logarítmico
- O preço das opções. A formula de Black-Scholes
- Os "gregos"
- Arbitragem e medidas neutrais. O teorema fundamental
- Medidas de risco
- Algumas histórias de mercado e o papel da matemática: subprime, Madoff, etc.
- Exercícios

Mercado e economia. Noções básicas

- **Economia e taxa de rendimento sem risco**
Embora as transações no mercado financeiro assumam diáriamente um volume muito maior que o valor correspondente da produção mundial, elas só fazem sentido se forem baseadas na existência duma economia real (produção de bens e consumo). Isso implica a existência duma taxa de rendibilidade média do capital que deveria ser relativamente estável e ligada à rendibilidade da economia. Na práctica é a taxa das obrigações do tesouro ou dos depósitos a prazo, que designamos com a letra μ.
- **Rendimento e risco:** Dum modo geral produtos de maior rendimento potencial, são também os de maior risco. O risco é o preço a pagar por um maior rendimento potencial.
- **Arbitragem:** portfólio $V(\theta)$ que obtém rendimento a partir de nada

$$V_0(\theta) \leq \text{ e } V_t(\theta, \omega_i) \geq 0 \text{ q.s. e } P(V_t(\theta, \omega_i) > 0) > 0$$

O mercado eficiente:

- $\{\mathcal{F}_t\}$ = informação sobre a história dos preços no mercado até ao tempo t

$\{\mathcal{G}_t\}$ = a informação anterior mais todos os dados possíveis sobre o estado da economia até ao tempo t
$\{\mathcal{F}_t\} \subset \{\mathcal{G}_t\}$
Mercado eficiente (noção fraca) $e^{-\mu t} S(t)$ é uma $\{\mathcal{F}_t\}$ −martingale
Mercado eficiente (noção forte) $e^{-\mu t} S(t)$ é uma $\{\mathcal{G}_t\}$ −martingale

- **Como obter rendimentos acima de μ no mercado**
  - Investir em produtos de risco e aceitar o risco (legal e legítimo. O que não é legítimo é investir em produtos de risco e em caso de perda exigir a outros que os compensem)
  - Manipular o mercado (ilegal)
  - Obter informação previligiada (ilegal)
  - Explorar as ineficiências temporárias do mercado - arbitragem estatística (legal)

Produtos financeiros

Negociados na bolsa ou "ao balcão" (OTC) (rede de negociadores em instituições financeiras, companhias, fundos de investimento, etc.)

Produtos básicos: Acções e obrigações

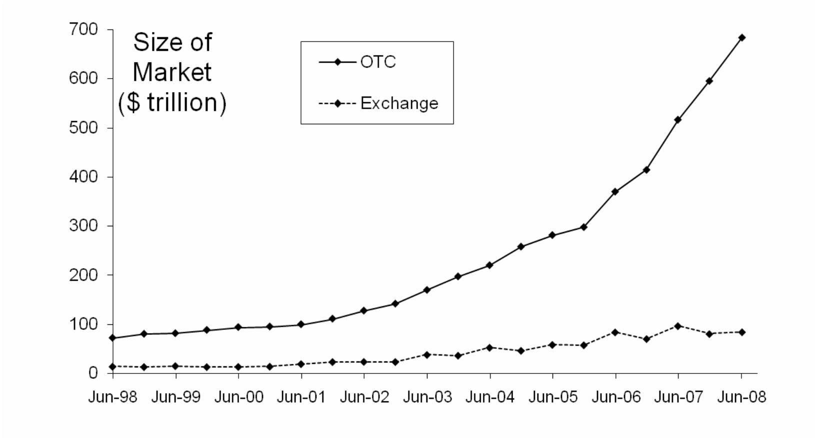
Produtos derivados: Contratos a prazo, futuros, opções, sawps, exóticos, etc.

Venda curta: Venda de produtos que não se possuem. Por exemplo tomar emprestado dum corretor (pagando uma taxa) um certo número de acções e vendê-las no mercado. Dentro de um prazo estabelecido o mesmo número de acções deverá ser devolvido. Dividendos e outros benefícios devem ser pagos ao dono original das acções.

Posição longa: compra efectiva de um produto

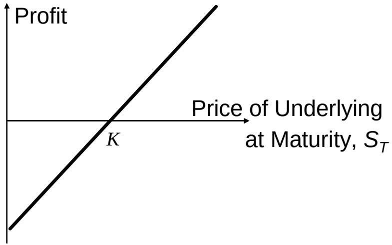
Os fluxos de dinheiro numa venda curta e numa posição longa são inversos.

Derivados: Evolução do volume dum mercado

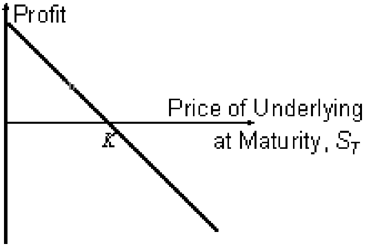


Derivados

Contrato a prazo (forward): Contrato para comprar ou vender um produto a um certo preço (S_T) num tempo T futuro, chamado o tempo de maturidade do contrato.
São negociados ao balcão (OTC). São especialmente populares para câmbios e taxas de juro.
O lucro que se pode obter com uma posição longa num contrato a prazo



O lucro que se pode obter com uma posição curta num contrato a prazo

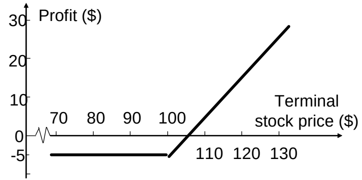


Futuro: Um futuro é semelhante a um contrato a prazo. A diferença é que é negociado numa bolsa.
Em geral são executados diáriamente.
A ambos os participantes dum futuro é exigido que depositem uma certa margem (dinheiro ou acções) na bolsa como garantia de cumprimento do contrato.

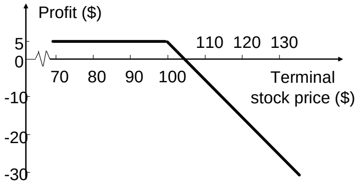
Derivados

Swap: Contrato de troca de fluxos de dinheiro numa data futura. Usados por exemplo para converter uma taxa variável numa fixa ou inversamente.
Opcões: (negociadas na bolsa ou ao balcão)
De compra (call): opção de compra numa data futura
De venda (put): opção de venda numa data futura
Tipos de opções:
Americana: Pode ser executada em qualquer altura até à maturidade.
Europeia: Só pode ser executada na maturidade.
Asiática: O rendimento é baseado na média dos preços ao longo dum periodo e não no preço na maturidade.
Barreira: Aparece ou desaparece quando o preço atinge um certo valor.
Cesto: Opções sobre um portfólio e não apenas sobre um produto único.
Binária: Fornece um certo valor fixo se determinado critério é satisfeito.
Compostas: Opções sobre opções
Lookback: Fornece rendimento baseado no preço máximo ou mínimo durante um intervalo de tempo.

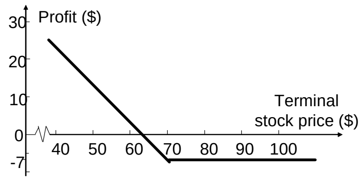
O lucro que se pode obter com uma posição longa num "call" (Preço=5; Preço de execução=100, Maturidade=2 mêses)



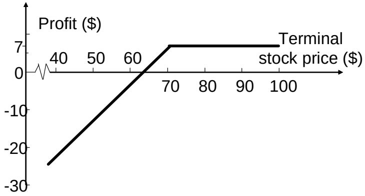
O lucro que se pode obter com uma posição curta num "call" (Preço=5; Preço de execução=100, Maturidade=2 mêses)



O lucro que se pode obter com uma posição longa num "put"
(Preço=7; Preço de execução=70, Maturidade=2 mêses)



O lucro que se pode obter com uma posição curta num "put"
(Preço=7; Preço de execução=70, Maturidade=2 mêses)



Derivados

Os produtos derivados podem ser usados como instrumentos de controle do risco (hedging).

Exemplos:

1 - Uma companhia europeia tem de pagar 10 milhões de dolares em importações dos EUA dentro de três meses. Para se proteger de fluctuações de câmbio faz um contrato a prazo. Assim evita o risco dum aumento da cotação do dolar. Por outro lado perderá dinheiro se entretanto a cotação do dolar descer.

2 - Um investidor tem 1000 acções da Microsoft que valem neste momento 28 dolares. Um put (de 100 acções) a dois meses com um preço de exercício de 27,5 dolares custa 1 dolar. O investidor, com receio duma descida das acções da Microsoft, compra 10 puts.

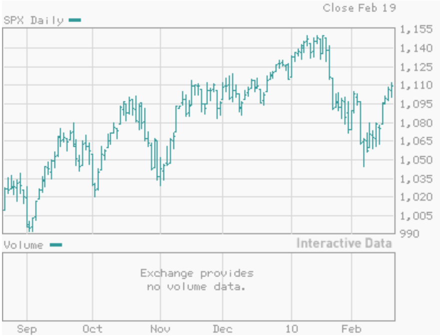
3 - Um contrato para receber LIBOR a 6 meses e pagar uma taxa fixa de 5% por ano todos os 6 meses durante 3 anos.

Derivados

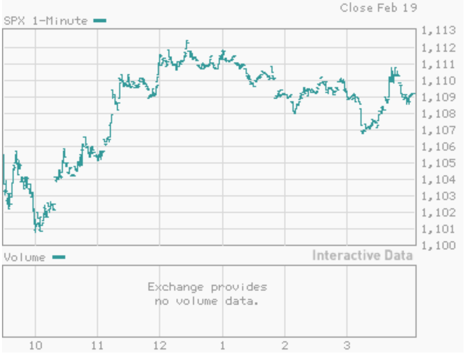
De facto, ao longo do tempo, desde há séculos, que os produtos derivados são inventados para controlar o risco. Os profissionais do mercado podem ser caracterizados em três tipos principais:
Especialistas de controle de risco (**hedgers**), especialistas de arbitragem (**arbitragers**) que exploram desíquilíbrios temporários dos mercados e **especuladores** que tomam grandes riscos na esperança de grandes lucros. Históricamente os grandes desastres financeiros ocorrem sobretudo quando os "hedgers" e "arbitragers" se tornam especuladores.

As fluctuações de mercado. Características gerais

Cotações das acções, opções, etc
Indices do mercado: PSI 20, SP500, Dow Jones, DAX, etc.
O SP 500: Dados diários



O SP 500: Dados de 1 minuto



Factos experimentais:
(i) A autocorrelação dos retornos $r_t = \frac{\Delta S_t}{S_t}$ é prácticamente nula.
(ii) Certas funções não-lineares dos retornos ($|r_t|$ por exemplo) têm autocorrelação $E\left[|r_t|\,|r_{t+\Delta t}|\right]$ e decrescem lentamente com Δt. Efeito de memória.
(iii) Leptokurtosis : os retornos têm distribuições com caudas longas e picos acentuados junto da média.
(iv) A autocorrelação de $sign\left(r_t\right)$ is insignificante.
(v) Agregação da volatilidade: tendência para que a grandes variações de preço se sigam grandes variações e a pequenas variações pequenas variações. A volatilidade ocorre em agregados.
(vi) A volatilidade é um processo com regresso à média e a sua distribuição é próxima duma lognormal ou gama inversa.
(vii) Efeito de alavancagem: A volatilidade tende a subir mais a seguir a uma queda de preço do que a seguir a um aumento.

Um modelo para as fluctuações de mercado. O movimento Browniano logarítmico

A ausência de autocorrelação dos retornos $r_t = \frac{\Delta S_t}{S_t}$ sugere um modelo em que a componente estocástica de r_t é um movimento Browniano.

Considere-se que S_t é o preço duma acção ou outro instrumento de mercado com risco e B_t é um movimento Browniano. Então

$$dS_t = \nu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

um processo Browniano com deriva (ν)

$$\frac{dS_t}{S_t} = \nu dt + \sigma dB_t$$

Se σ for constante a solução desta equação é

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \left(\nu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t}$$

Note-se o termo $\frac{\sigma^2}{2}$ que não apareceria se a equação fosse determinista

Um modelo para as fluctuações de mercado. O movimento Browniano logarítmico

Para além dos produtos com risco é também costume considerar um (ou mais) produtos sem risco isto é, por exemplo, uma obrigação do tesouro ou um depósito a prazo

$$d\beta_t = \mu \beta_t dt$$

isto é

$$\beta_t = \beta_0 e^{\mu t}$$

Suponhamos que durante o intervalo de tempo (t_i, t_{i+1}) um investidor detem a_i unidades duma certa acção. Então ao longo do tempo o seu ganho (ou perda) é

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(S_{t_i+1} - S_{t_i} \right)$$

ou seja, é o integral estocástico

$$\int_0^t a_s dS_s$$

Um modelo para as fluctuações de mercado. O movimento Browniano logarítmico

Para o produto sem risco temos analogamente

$$\int_0^t b_s d\beta_s$$

O par (a_t, b_t) define a estratégia de um investidor
Uma estratégia diz-se **auto-financiada** se o seu valor for

$$V_t = a_t S_t + b_t \beta_t = V_0 + \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s d\beta_s$$

isto é não existir no intervalo $(0, t)$ qualquer aumento de capital vindo do exterior do mercado.

A formula de Black-Scholes

Valor duma "call" europeia (direito de comprar ao preço K no tempo T)
K = preço de exercício
T = tempo de execução
$V(S,t)$ = valor do call no tempo t
$V(S,T) = \max(S-K,0)$
O valor do call vai ser obtido formando um portfólio sem risco

$$\Pi = \{1 \text{ call}, \ (-\Delta) \text{ em acções}\} = V - S\Delta$$

$-\Delta$ = venda curta
$\Delta(S,t)$ = numero de acções se em t tivermos $S = S_t$
Variação do valor do portfólio

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= dV(S,t) - \Delta(S_t,t)\,dS_t \\ &= \frac{\partial V}{\partial S}dS_t + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 dt - \Delta(S_t,t)\,dS_t \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta(S_t,t)\right)dS_t \end{aligned}$$

A formula de Black-Scholes

Escolhendo $\frac{\partial V}{\partial S} = \Delta(S_t, t)$ obtém-se um portfólio sem risco. Ausência de arbitragem implica que então este portfólio deverá ter o rendimento μ

$$d\Pi(t) = \mu\Pi(t)\,dt$$

donde

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 = \mu\left(V - S_t\frac{\partial V}{\partial S}\right)$$

Esta é a equação de Black-Scholes, com condição fronteira

$$V(S, T) = \max(S - K, 0)$$

Solução da equação de Black-Scholes

Mudança de variáveis $x = \log S$, $V = V_1 e^{\mu t}$ e

$$V_1(x,t) = W\left(x - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, t\right)$$

conduz a

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

equação do calor, que uma vez resolvida dá

$$V_{call}(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-\mu(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + \left(\mu + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/K) + \left(\mu - \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\xi^2/2}d\xi$$

Correspondência call-put

Correspondência "call-put" (opções europeias)
A partir do valor duma "call" europeia pode obter-se o valor dum "put"

$$V_{put}\left(S,t\right)=V_{call}\left(S,t\right)-S\left(t\right)+e^{-\mu\left(T-t\right)}K$$

A derivação desta formula obtém-se formando o seguinte portfólio

$$\Pi\left(t\right)=S\left(t\right)+V_{put}\left(S,t\right)-V_{call}\left(S,t\right)$$

e provando que o seu valor é

$$\Pi\left(t\right)=e^{-\mu\left(T-t\right)}K$$

(Exercício n^{o} 9)

Os "gregos"

A sensibilidade dum portfólio às diversas variáveis do mercado é caracterizada por indíces aos quais são tradicionalmente associadas letras gregas

$\delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}$; $\gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$; $v = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$; $\theta = -\frac{\partial \Pi}{\partial t}$; $\rho = \frac{\partial \Pi}{\partial \mu}$

Um técnica de controle de risco é formar portfólios neutrais ($\delta = 0, \cdots$)

Os "gregos" duma opção usando Black-Scholes

	Calls	Puts
δ	$N(d_1)$	$-N(-d_1)$
v	$SN(d_1)\sqrt{T-t}$	$Ke^{-\mu(T-t)}N(d_2)\sqrt{T-t}$
θ	$-\frac{SN(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - \mu KN(d_2)\, e^{-\mu(T-t)}$	$-\frac{SN(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + \mu KN(-d_2)\, e^{-\mu(T-t)}$
ρ	$K(T-t)\, e^{-\mu(T-t)} N(d_2)$	$-K(T-t)\, e^{-\mu(T-t)} N(-d_2)$
γ	$\frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	$\frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$

Mercado com n produtos dos quais o primeiro é o produto sem risco $\left(\theta_0\left(t\right) = e^{\mu t}\theta_0\left(0\right)\right)$

Portfólio

$$\theta = \left(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_n\right) = \left(\theta_0, \overrightarrow{\theta}\right)$$

Cenários de mercado $\{\omega_i, i = 1, \cdots, L\}$

Valor do portfólio no tempo t para o cenário ω_i

$$V_t\left(\theta, \omega_i\right) = \sum_{j=0}^{n} \theta_j S_j\left(\omega_i, t\right)$$

Arbitragem = um portfólio que obtém rendimento a partir de nada

$$V_0\left(\theta\right) \leq \text{ e } V_t\left(\theta, \omega_i\right) \geq 0 \text{ q.s. e } P\left(V_t\left(\theta, \omega_i\right) > 0\right) > 0$$

Se a medida de probabilidade sobre os cenários não tiver arbitragem, quer dizer que cenários com arbitragem têm probabilidade nula.

Arbitragem e medidas neutrais. O teorema fundamental

Diz-se que duas medidas de probabilidade P e π são equivalentes quando tiverem os mesmos conjuntos de probabilidade nula. Nesse caso as probabilidades estão relacionadas por

$$dP = \frac{dP}{d\pi} d\pi$$

com $\frac{dP}{d\pi}$ limitada.

Se uma medida P não tiver arbitragem, então as medidas equivalentes a P também não têm.

Medidas de risco neutral

Uma distribuição de probabilidade π^* diz-se uma **medida de risco neutral** se para todo o produto de mercado, o seu preço a $t = 0$ é o valor de expectação descontado do preço noutro tempo t.

$$S_j(0) = e^{-\mu t} E^* \left[S_j(t) \right] = e^{-\mu t} \sum_{i=1}^{L} \pi^* (\omega_i) S_j(\omega_i, t)$$

O conjunto $\{\omega_i\}$ é o conjunto dos possíveis cenários de mercado.

A existência de uma medida neutral significa que qualquer investimento que possa dar um rendimento superior a μ implica necessáriamente um certo risco.

Teorema: *Dada uma medida de probabilidade P existe uma medida de risco neutral equivalente se e só se não houver arbitragens*

Prova:

(**Se**) - Seja π^* a medida neutral. Então

$$V_0(\theta) = e^{-\mu t} \sum_{i=1}^{L} \pi^*(\omega_i) V_t(\theta, \omega_i)$$

Se $V_t(\theta, \omega_i) > 0$ ou ≥ 0 será também $V_0(\theta) > 0$ ou ≥ 0 e portanto não haverá arbitragem.

(**Só se**) - Para $j = 0$ a equação é trivial porque se for $S_0(0) = 1$ então $S_0(t) = e^{\mu t}$ para todos os cenários. Portanto

$$S_0(0) = 1 = e^{-\mu t} \sum_{i=1}^{L} \pi(\omega_i) e^{\mu t} = 1$$

Arbitragem e medidas neutrais. O teorema fundamental

Consideram-se agora os casos $j = 2, 3, \cdots, n$. Consideremos os vectores Y_j

$$Y_j = e^{-\mu t} S_j(t) - S_j(0)$$

Para uma medida neutral π^* seria

$$E_{\pi^*}[Y_j] = 0$$

Consideremos agora o conjunto

$$\mathcal{C} = \{E_\pi[Y_j] \, | \pi \in Q\}$$

sendo Q o conjunto de todas as medidas de probabilidade π com densidades $dP/d\pi$ limitadas. Q é convexo $(\alpha\pi_1(\omega) + (1-\alpha)\pi_2(\omega) \in Q)$. Portanto $\mathcal{C}$ também é convexo. Se $\mathcal{C}$ não contiver a origem existirá um vector ξ tal que $\xi \bullet \pi \geq 0$ para todo $\pi \in Q$ e também $\xi \bullet \pi' > 0$ para algum $\pi' \in Q$. Isto significa que há uma arbitragem. Portanto a origem $0 \in \mathcal{C}$, isto é existe π^* tal que

$$E_{\pi^*}[Y_j] = 0$$

Medidas de risco

(Ω, Q) = espaço de probabilidade dos cenários
Seja $X(\omega)$ o resultado da estratégia X no tempo T no caso do cenário ω.
A = espaço das estratégias aceitáveis
X é aceitável se $X(\omega) \geq Y(\omega)$, para todo os cenários ω em Ω para uma dada Y fixa (estratégia de referência)
O **risco** pode ser definido como a quantidade de capital a ser investido num produto sem risco de modo a que X passe a pertencer ao conjunto das aceitáveis

$$\rho(X) = \inf\{m : X + m \in A\}$$

que implica

$$\rho(X + m) = \rho(X) - m$$

Medidas de risco coerentes

Requisitos:

a) Invariância de translação

$$\rho\left(X+m\right)=\rho\left(X\right)-m$$

b) Subaditividade

$$\rho\left(X+Y\right)\leq\rho\left(X\right)+\rho\left(Y\right)$$

c) Homogeneidade positiva

$$\rho\left(\lambda X\right)=\lambda\rho\left(X\right)\qquad\lambda\geq 0$$

d) Monotonicidade

$$X\leq Y\implies\rho\left(X\right)\geq\rho\left(Y\right)$$

Medidas de risco

Contudo em muitos casos o risco duma posição pode crescer dum modo não-linear. Daí que se julgou mais conveniente substituir b) e c) por
- **Convexidade**

$$\rho\left(\lambda X+(1-\lambda) Y\right) \leq \lambda\rho\left(X\right)+(1-\lambda)\rho\left(Y\right) \qquad \lambda \in [0,1]$$

significa que a diversificação não aumenta o risco.
Medidas de risco convexas = a)+d)+convexidade
Dada uma medida de risco podemos definir um conjunto de estratégias aceitáveis por

$$A=\left\{X:\rho\left(X\right)\leq 0\right\}$$

$$X:\Omega\rightarrow R$$

Inversamente

$$\rho_A\left(X\right)=\inf\left\{m:X+m\in A\right\}$$

Teorema de representação para as medidas convexas
Seja M o conjunto das medidas de probabilidade em Ω (finito), ρ é uma medida de risco convexa se e só se existe uma **função de penalidade** α

$$\alpha : M \longrightarrow (-\infty, \infty]$$

$$\boxed{\rho(X) = \sup_{Q \in M} \left(E_Q[-X] - \alpha(Q)\right)}$$

α pode ser convexa e semicontínua inferiormente

$$\alpha(Q) \geq -\rho(0)$$

Prova (Föllmer, Schied):

$$X \longrightarrow \left(E_Q[-X] - \alpha(Q)\right)$$

é convexa, monótona e invariante para translações. Estas propriedades são preservadas pelo sup.
"Só se"

$$\alpha(Q) = \sup_X \left(E_Q[-X] - \rho(X)\right)$$

Defina e prove

$$\alpha(Q) = \sup_{X \in A_\rho} (E_Q[-X])$$

Então

$$\sup_{Q \in M} (E_Q[-Y] - \alpha(Q)) = \sup_{Q \in M} \left(E_Q[-Y] - \sup_{X \in A_\rho} (E_Q[-X]) \right) \leq \rho(Y)$$

É só para provar a desigualdade contrária que a natureza finita de Ω é usada para mostrar que

$$A_\rho = \{\rho \leq 0\}$$

é um conjunto fechado e convexo. Para um espaço de probabilidade geral tem de se assumir que o conjunto é fechado numa topologia adequada. Para medidas coerentes

$$\alpha(Q) = 0 \qquad \text{ou} \qquad +\infty$$

$$\rho(X) = \sup_{Q \in M} (E_Q[-X] - \alpha(Q))$$

Medidas de risco

O significado do termo de penalidade:
- O investidor atribui diferentes graus de credibilidade aos diversos cenários de probabilidade
- Na crise do subprime: Foram os corretores e agências de notação simplesmente descuidados ou desonestos? Ou seria a seu termo de penalidade demasiado grande para o cenário de desvalorização do imobiliário?

A medida de risco entrópica

$$e_\gamma(X) = \sup_{Q \in M} \left(E_Q[-X] - \gamma E_P \left(\frac{dQ}{dP} \ln \frac{dQ}{dP} \right) \right)$$

Défice: Seja L uma função real crescente e convexa. Defina-se a classe das estratégias aceitáveis

$$A_\varepsilon \mathrel{\hat{=}} \{X : E[L(-X)] \leq \varepsilon\}$$

a medida de risco correspondente é convexa

$$\rho_{A_\varepsilon}(X) = \inf\{m : X + m \in A_\varepsilon\}$$

Medidas de risco na práctica: VaR e défice expectável
"Qual é o nível de perda Λ^* que nós temos confiança a $P^*\%$ que não será excedida em T dias?

$$P\left(\delta x < -\Lambda\right) = \int_{-\infty}^{-\Lambda} P_T\left(\delta x\right) d\left(\delta x\right)$$

VaR $= \Lambda^*$

$$\int_{-\infty}^{-\Lambda^*} P_T\left(\delta x\right) d\left(\delta x\right) = P^*$$

Por exemplo $T = 10$ dias e $P^* = 0.05$ (95% VaR)
Para uma distribuição Gaussiana de δx

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ \frac{\left(\delta x - m\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \qquad \Lambda^* = \sqrt{2T}\sigma\, \mathrm{erfc}^{-1}\left(2P^*\right) - m$$

Para uma lei de potência (processo de Lévy)

$$P_T\left(\delta x\right) \simeq \frac{\mu A^\mu}{\left(\delta x\right)^{1+\mu}} \qquad \Lambda^* = AP^{*-1/\mu}$$

Défice expectável $= E^*$

$$E^* = \frac{1}{P^*} \int_{-\infty}^{-\Lambda^*} (-\delta x) \, P_T(\delta x) \, d(\delta x)$$

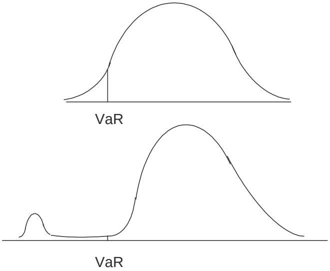
Para uma lei de potência

$$E^* = \frac{\mu}{\mu - 1} \Lambda^* \qquad (\mu > 1)$$

As entidades reguladoras baseiam a exigência de capital dos bancos no VaR. O capital associado ao risco de mercado é k vezes o VaR 99% de 10 dias, sendo k pelo menos 3.
Segundo Basileia II o capital para a cobertura do risco de crédito e do risco operacional baseia-se no VaR 99.9% de um ano. As entidades reguladoras autorizam os bancos a calcular o VaR de dez dias como dez vezes o de um dia (hipótese Gaussiana)

Medidas de risco (VaR e défice expectável)

VaR captura um aspecto importante do risco num simples número. É simples de perceber e refere-se à uma simples questão: "O que é que de pior pode acontecer?" Contudo: VaR não é uma medida convexa pelo que não encoraja a diversificação.
O défice expectável é convexo. VaR é o nível de perda que não será excedido com uma certa probabilidade. O défice expectável é a perda esperada quando a perda fôr maior que o nível VaR (também chamado C-VaR)
Dois portfólios com o mesmo VaR podem ter défices muito diferentes



Histórias do mercado: A crise do subprime

- Tradicionalmente os bancos mantinham as suas hipotecas num só portfólio e tinham de deter capital suficiente para cobrir o seu risco.
- A grande mudança da década de 1980: **A transferência do risco do crédito**
  Agregação das hipotecas, divisão em fatias, venda a terceiros.
  Portanto **o risco de incumprimento das hipotecas desaparece da escrita do banco original**, que assim fica com margem de capital disponível para fazer novas hipotecas (e receber taxas), hipotecas que são de novo agregadas e vendidas, etc., etc
- Muitas instituições, fundos de pensões, fundos de investimento e mesmo bancos que não negoceiam em hipotecas detinham grandes portfólios de títulos "altamente cotados" baseados em hipotecas ou mesmo CDO's destes.
- No negócio das hipotecas, os bancos comerciais cobravam taxas, os agentes intermediários cobravam taxas, assim como as agências de notação. Conclusão: **Lucros explosivos do sector bancário.**

A crise do subprime

- A concessão e a notação das hipotecas tornou-se demasiado "liberal". Os agentes imobiliários, os bancos e as agências de notação não se preocupavam muito com os rendimentos de quem recebia o empréstimo. Limitavam-se a reber as suas taxas. De qualquer modo o risco não era deles uma vez que ia ser transferido. Por outro lado o preço das casas que serviam de garantia ia sempre subindo.
- Quando o nível de incumprimento das hipotecas aumentou o valor das títulos emitidos sobre as hipotecas desceu.
- As instituições que detinham esses produtos tiveram que declarar grandes quebras no seu património, procurar aumentos de capital e os bancos reduziram drasticamente os empréstimos.
  A redução dos empréstimos afectou todas as empresas, mesmo as que não estavam involvidas no negócio das hipotecas por causa do equilíbrio capital e passivo e do financiamento das suas operações.

A crise do subprime

- Os fundos de investimento perdendo dinheiro no subprime, **começaram a vender as suas posições noutros mercados. As acções cairam.**
- À medida que as casas de hipotecas incumpridas eram leiloadas a preços baixos, os preços do imobiliário desceram ainda mais, conduzindo a mais incumprimentos pela impossibilidade de refinanciamento ou pela simples questão: *Porquê pagar ao banco mais do que o que a casa vale?*

A crise financeira: Culpa da matemática?

- Le Monde.fr

  Crise financière:la faute aux mathématiques?

- FRANCE 24

  Subprime crisis
  Did rocket scientists destroy world markets ?

- blogbosteur.kaywa.com

  Il faut démissioner Nicole El Karaoui


Un krach des maths
SacHant que X est une invariante du marché
Et Y une donnée Fixe de la Bourse
On ne devrait pas tarder à l'avoir dans le Q du consommateur.


MODEL OF A PERFECT ECONOMIC SYSTEM

A crise financeira: Culpa da matemática?

- De facto a matemática estava lá.
- Porém ninguém prestou atenção, porque era mais lucrativo não o fazer.
- Um exemplo: *As medidas de risco e os termos de penalidade*
- **O teorema de representação das medidas convexas. (Föllmer and Schied)**
  Seja M o conjunto das medidas de probabilidade em Ω (finito). ρ é uma medida de risco convexa se e só se existe um termo de penalidade α

$$\alpha : M \longrightarrow (-\infty, \infty]$$

$$\boxed{\rho(X) = \sup_{Q \in P} \left(E_Q[-X] - \alpha(Q) \right)}$$

α pode ser convexo e semicontínuo inferiormente em P e satisfaz

$$\alpha(Q) \geq -\rho(0)$$

Era a crise previsível?

FEDERAL RESERVE BANK *of* ATLANTA

Making Sense of the Subprime Crisis

Kristopher S. Gerardi, Andreas Lehnert,
Shane M. Sherland, and Paul S. Willen

Working Paper 2009-2
February 2009

WORKING PAPER SERIES

Era a crise previsível?

As agências de notação que deram classificações AAA a produtos que agora são considerados "tóxicos" são consideradas responsáveis pela crise. Porém ...

foreclosures to house prices. The authors show that, given available data, market participants should have been able to understand that a significant fall in prices would cause a large increase in foreclosures although loan-level (as opposed to ownership-level) models would have predicted a smaller rise than actually occurred. Examining analyst reports and other contemporary discussions of the mortgage market to see what market participants thought would happen, the authors find that analysts, on the whole, understood that a fall in prices would have disastrous consequences for the market but assigned a low probability to such an outcome.

... eis o termo de penalidade em acção!

Mesmo quando a matemática é simples, por vezes as pessoas não tomam atenção. Porquê?

- A comunicação de Markopoulos à SEC em 1999 e a sua carta de 2005 acerca de Bernard Madoff

The World's Largest Hedge Fund is a Fraud

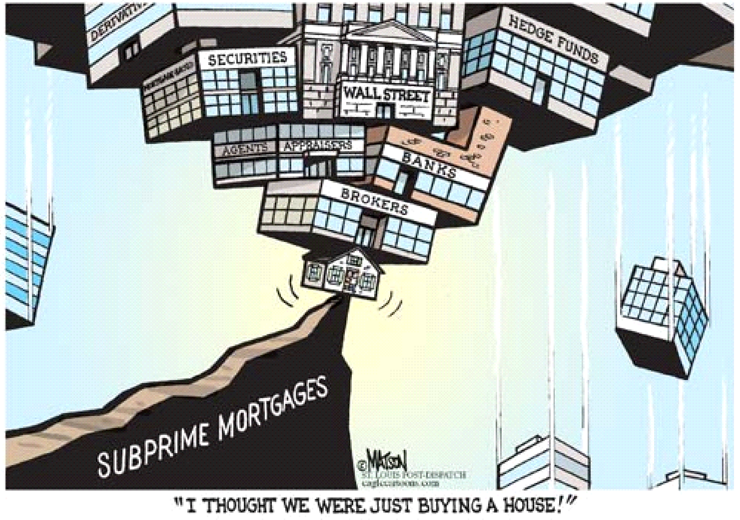
November 7, 2005 Submission to the SEC
Madoff Investment Securities, LLC
www.madoff.com

- Usando matemática simples ele mostrou que a estratégia de Madoff não podia gerar um rendimento médio anual de 12% a menos que estivesse a usar **informação previligiada** ou um **esquema de Ponzi**
- Embora algumas grandes empresas de corretagem (por exemplo Goldman Sachs) tenham evitado negociar com Madoff, ele continuou a atrair muito investimento na Europa e nos EUA. Mesmo num esquema de Ponzi os primeiros investidores (ou aqueles que pensam que são especiais) têm a esperança de conseguir um lucro. Por outro lado a SEC nada fez em tempo útil.

A dependência sensível (às perturbações)

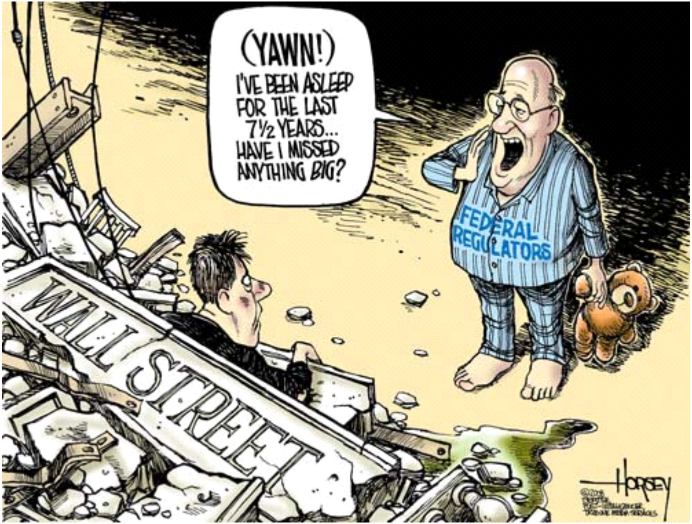
- *Com o debacle das hipotecas subprime, o valor dos títulos nelas baseados caiu.*
  As instituições que os detinham **tiveram que reduzir milhões ao valor dos seus activos**, *procurar* **grandes infusões de capital** *e os bancos* **reduziram drásticamente os empréstimos**
  A redução de empréstimos bancários afecta todas as empresas, mesmo as que não estão ligadas ao negócio das hipotecas, por causa do **equilíbrio capital-passivo e do financiamento das suas operações.**
  Os fundos de investimento ao perder no subprime começaram **a vender posições nos outros mercados. As acções cairam.**
- Deste modo um sector que representava menos de 5% do mercado americano originou uma crise global.
- Aqui também a matemática é bem conhecida. É a *matemática da dinâmica não-linear*.

A dependência sensível (às perturbações)



Regulação e inovação

Também se atribuiu a culpa a uma falta de regulação do mercado



Regulação e inovação

- Os bancos, ao contrário de outras instituições financeiras, estão sujeitos a supervisão e regulação
  1988: O acordo BIS (Basel I)
  1996: Emendas ao acordo BIS
  1999: Basel II é proposto
- Isto porém não os desencorajou (ou talvez os tenha encorajado) a encontrar maneiras subtis de retirar os riscos do seu balanço.
- Conclusão: **Não há regulação que impeça as inovações destinadas a iludi-la. Portanto a regulação deve ser tão dinâmica como a inovação. Será isto possível ou desejável?**
- Aqui há talvez que procurar inspiração na matemática da biologia. Por exemplo nos modelos de adaptação dos micro-organismos aos antibióticos.

9 - *Prove a formula de correspondência "call-put" para opções europeias*

$$V_{put}\left(S,t\right) = V_{call}\left(S,t\right) - S\left(t\right) + e^{-\mu(T-t)}K$$

10 - *Um investidor quer especular na possível subida do preço duma acção. O preço actual é 29 euros e um "call" de três meses sobre esta acção, com um preço de exercício de 30 euros, custa 2,9 euros. O investidor tem 5800 euros para investir. O investidor vai escolher uma de duas estratégias: ou investir todo o seu capital em acções (A) ou em "calls" (B). Calcule os lucros ou prejuizos do investidor para as estratégias A e B e para os dois cenários seguintes: O valor das acções daqui a três meses é: 35 euros (C1); o valor das acções daqui a três meses é 25 euros.*