O movimento Browniano

R. Vilela Mendes
http://label2.ist.utl.pt/vilela/

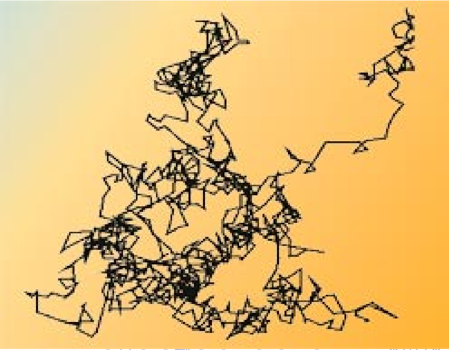
March 2010

Sumário

- O movimento Browniano
- Propriedade Markoviana
- Probabilidade de transição. Medida de Wiener
- Média e covariância
- Ruído branco e movimento Browniano
- Não-diferenciabilidade, variação total e variação quadrática
- Movimento Browniano e a equação do calor (*)
- Equações inversas e formula de Feynman-Kac (*)
- Integrais no tempo, de Ito e Stratonovich
- Lema de Ito
- Equações diferenciais estocásticas
- Movimento Browniano geométrico

Movimento Browniano

- O movimento Browniano é o processo estocástico mais simples entre os "processos de difusão".
- No século XIX um botânico chamado Brown observou ao microscópio grãos de polen em água. Verificou que se moviam aleatóriamente como se fossem seres vivos. O mesmo acontecia com grãos de poeira.
- O movimento resulta das colisões das moléculas de água e do facto que, dadas as pequenas dimensões do objecto, não há compensação perfeita do efeito das diversas colisões.



Movimento Browniano

A

BRIEF ACCOUNT

OF

MICROSCOPICAL OBSERVATIONS

Made in the Months of June, July, and August, 1827,

ON THE PARTICLES CONTAINED IN THE POLLEN OF PLANTS;

AND

ON THE GENERAL EXISTENCE OF ACTIVE MOLECULES

IN ORGANIC AND INORGANIC BODIES.

BY

ROBERT BROWN,

F.R.S., HON. M.R.S.E. AND R.I. ACAD., V.P.L.S.,

MEMBER OF THE ROYAL ACADEMY OF SCIENCES OF SWEDEN, OF THE ROYAL SOCIETY OF DENMARK, AND OF THE IMPERIAL ACADEMY NATURÆ CURIOSORUM; CORRESPONDING MEMBER OF THE ROYAL INSTITUTES OF FRANCE AND OF THE NETHERLANDS,

Movimento Browniano: Descrição matemática

- $B(t)$:$B(0) = 0$. O incremento entre $t_1 > 0$ e $t_2 > t_1$, $B = B(t_2) - B(t_1)$, é a soma dum grande número de variávies i.i.d. de média zero. É natural supor que o número de colisões é proporcional a $t_2 - t_1$. Pelo teorema do limite central isto implica que B **é Gaussiano com variância proporcional a** $t_2 - t_1$. Normaliza-se de modo a que a variância seja exactamente $t_2 - t_1$. Se $t_3 > t_2$ e $B_2 = B(t_3) - B(t_2)$, $B_1 = B(t_2) - B(t_1)$, então B_2 e B_1 são independentes com variâncias $t_3 - t_2$ e $t_2 - t_1$.

Movimento Browniano: Descrição matemática

- $B(t)$:$B(0) = 0$. O incremento entre $t_1 > 0$ e $t_2 > t_1$, $B = B(t_2) - B(t_1)$, é a soma dum grande número de variávies i.i.d. de média zero. É natural supor que o número de colisões é proporcional a $t_2 - t_1$. Pelo teorema do limite central isto implica que B **é Gaussiano com variância proporcional a** $t_2 - t_1$. Normaliza-se de modo a que a variância seja exactamente $t_2 - t_1$. Se $t_3 > t_2$ e $B_2 = B(t_3) - B(t_2)$, $B_1 = B(t_2) - B(t_1)$, então B_2 e B_1 são independentes com variâncias $t_3 - t_2$ e $t_2 - t_1$.
- **Medida de Wiener:**
  As trajectórias do movimento Browniano existem em $C_0([0,T],R) =$ espaço das funções contínuas $B(t)$, para $0 \leq t \leq T$. C_0 significa $B(0) = 0$. A algebra$-\sigma$ é a algebra de Borel (gerada pelos conjuntos abertos: $\max \left| x(t) - \bar{x}(t) \right| < \varepsilon$).
  Nem todas as trajectórias em $C_0([0,T],R)$ são trajectórias do movimento Browniano. O movimento Browniano corresponde a uma medida em $C_0([0,T],R)$, **medida de Wiener**.

Probabilidade de transição

- $G(y,x,s) =$ Densidade de probabilidade de estar em x no tempo $t+s$ sabendo que no tempo t se estava em y. O incremento $B(t+s) - B(t)$ é Gaussiano com variância s

$$G(y,x,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{(x-y)^2/2s} .$$

O coeficiente $\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}$ é obtido por normalização $\left(\int_0^\infty G\left(y,x,s\right) dx = 1\right)$

Probabilidade de transição

- $G(y, x, s) =$ Densidade de probabilidade de estar em x no tempo $t + s$ sabendo que no tempo t se estava em y. O incremento $B(t + s) - B(t)$ é Gaussiano com variância s

$$G(y, x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{(x-y)^2/2s} .$$

  O coeficiente $\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}$ é obtido por normalização $\left(\int_0^\infty G(y, x, s)\, dx = 1\right)$

- **Funcionais:** A um elemento de $\Omega = C_0([0, T], R)$ vamos chamar B. A uma função dos elementos de Ω (uma função em Ω) chama-se um **funcional do movimento Browniano**. Exemplos de funcionais:
  Integrais: $F_1(B) = \int_0^T V(B(t))dt$,
  Pontos extremos: $F_2(B) = \max_{t \leq T} B(t)$,
  Tempos de paragem: $F_3(B) = \min(t \mid B_t = a)$.

Probabilidade de transição

- $G(y, x, s)$ = Densidade de probabilidade de estar em x no tempo $t+s$ sabendo que no tempo t se estava em y. O incremento $B(t+s) - B(t)$ é Gaussiano com variância s

$$G(y, x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{(x-y)^2/2s} .$$

O coeficiente $\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}$ é obtido por normalização $\left(\int_0^\infty G(y, x, s)\, dx = 1\right)$

- **Funcionais:** A um elemento de $\Omega = C_0([0, T], R)$ vamos chamar B. A uma função dos elementos de Ω (uma função em Ω) chama-se um **funcional do movimento Browniano**. Exemplos de funcionais:
Integrais: $F_1(B) = \int_0^T V(B(t))dt$,
Pontos extremos: $F_2(B) = \max_{t \leq T} B(t)$,
Tempos de paragem: $F_3(B) = \min(t \mid B_t = a)$.
- A **análise estocástica** é o conjunto de técnicas que permite estudar os funcionais dos processos Brownianos (e de outros processos). Permite também relacionar os funcionais dos processos estocásticos com soluções de equações diferenciais.

Propriedade Markoviana

- $\mathcal{F}_t$ = algebra$-\ \sigma$ gerada pela trajectória até ao tempo t. É a menor algebra$-\sigma$ tal que todas as varaiáveis aleatórias $B(s)$ para $s \leq t$ são mensuráveis.
  $\mathcal{G}_t$ = algebra$-\sigma$ gerada pelo presente. G_t é gerada por $B(t)$. A menor algebra$-\sigma$ para a qual $B(t)$ é mensurável.
  $\mathcal{H}_t$ = algebra$-\sigma$ que só depende dos valores futuros de $B(s)$ para $s \geq t$.

Propriedade Markoviana

- $\mathcal{F}_t$ = algebra$-\ \sigma$ gerada pela trajectória até ao tempo t. É a menor algebra$-\sigma$ tal que todas as varaiáveis aleatórias $B(s)$ para $s \leq t$ são mensuráveis.
  $\mathcal{G}_t$ = algebra$-\sigma$ gerada pelo presente. G_t é gerada por $B(t)$. A menor algebra$-\sigma$ para a qual $B(t)$ é mensurável.
  $\mathcal{H}_t$ = algebra$-\sigma$ que só depende dos valores futuros de $B(s)$ para $s \geq t$.
- Um processo B diz-se ter a propriedade de Markov se para um funcional $F(B)$

$$E[F \mid \mathcal{F}_t] = E[F \mid \mathcal{G}_t]$$

Por ter incrementos independentes **o movimento Browniano é um processo de Markov**.

Propriedade Markoviana

- $\mathcal{F}_t$ = algebra$-$ σ gerada pela trajectória até ao tempo t. É a menor algebra$-\sigma$ tal que todas as varaiáveis aleatórias $B(s)$ para $s \leq t$ são mensuráveis.
  $\mathcal{G}_t$ = algebra$-\sigma$ gerada pelo presente. G_t é gerada por $B(t)$. A menor algebra$-\sigma$ para a qual $B(t)$ é mensurável.
  $\mathcal{H}_t$ = algebra$-\sigma$ que só depende dos valores futuros de $B(s)$ para $s \geq t$.
- Um processo B diz-se ter a propriedade de Markov se para um funcional $F(B)$
  $$E[F \mid \mathcal{F}_t] = E[F \mid \mathcal{G}_t]$$
  Por ter incrementos independentes **o movimento Browniano é um processo de Markov**.
- **Probabilidade duma trajectória:**
  $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n \leq T$,
  $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$
  $\vec{X} = (B(t_1), \ldots, B(t_n))$

Probabilidade das trajectórias. Medida de Wiener

- $U^{(n)}(\vec{x}, \vec{t}) =$ densidade de probabilidade da observação conjunta dos n valores $\overrightarrow{B} = (B(t_1), \ldots, B(t_n))$

$$
\begin{aligned}
U^{(n)}(\vec{x}, \vec{t}) &= \prod_{k=0}^{n-1} G(x_k, x_{k+1}, t_{k+1} - t_k) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}} \exp\left(\frac{-1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{t_{k+1} - t_k} \right) .
\end{aligned}
$$

Probabilidade das trajectórias. Medida de Wiener

- $U^{(n)}(\vec{x},\vec{t}) =$ densidade de probabilidade da observação conjunta dos n valores $\overrightarrow{B} = (B(t_1),\ldots,B(t_n))$

$$
\begin{aligned}
U^{(n)}(\vec{x},\vec{t}) &= \prod_{k=0}^{n-1} G(x_k, x_{k+1}, t_{k+1}-t_k) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}-t_k}} \exp\left(\frac{-1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{t_{k+1}-t_k} \right) .
\end{aligned}
$$

- Este densidade de probabilidade **define a medida de Wiener**. Seja A o evento correspondente à passagem nas janelas $I_1, I_2 \cdots I_n$ nos tempos $t_1, t_2 \cdots t_n$. Então a probabilidade do evento A é:

$$P(A) = \int_{x_1 \in I_1} \cdots \int_{x_n \in I_n} U^{(n)}(x_1,\ldots,x_n,\vec{t}) dx_1 \cdots dx_n \ .$$

Média e covariância do movimento Browniano

- $B(t) \doteq B_t - B_0$

$$E\left[B(t)\right] = 0$$

Média e covariância do movimento Browniano

- $B(t) \doteq B_t - B_0$

$$E\left[B(t)\right] = 0$$

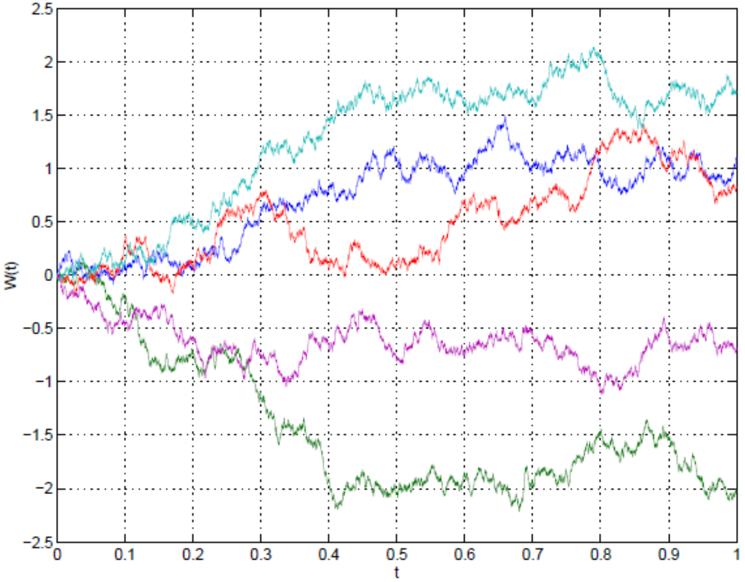
- Cálculo de $E[B(t)B(s)]$. Se for $s > t$ escreve-se $B(s) = B(t) + \Delta B$ sendo ΔB independente de $B(t)$

$$\begin{aligned} E[B(t)B(s)] &= E[B(t)(B(t) + \Delta B)] \\ &= E[B(t)B(t)] \\ &= t \end{aligned}$$

Se $s < t$ obtém-se $E[B_t B_s] = s$. Portanto

$$E[B(t)\,B(s)] = \min(t, s)$$

Imagem de trajectórias típicas



Ruido branco e movimento Browniano

O **ruído branco** (W_t) é um processo Gaussiano centrado, com W_{t_1} independente de W_{t_2} se $t_1 \neq t_2$.

$$E[W_t] = 0$$

$$E[W_t W_s] = \delta(t-s)$$

Se $t_0 < t_1 < t_2$ então $Y_1 = \int_{t_0}^{t_1} W_\tau d\tau$ e $Y_2 = \int_{t_1}^{t_2} W_\tau d\tau$ são independentes. Isto é os incrementos deste integral são independentes e têm média zero. Calculemos a covariância

$$E\left[\int_0^t W_\tau d\tau, \int_0^s W_{\tau'} d\tau'\right] = \int_0^t \int_0^s \delta(\tau - \tau')\, d\tau d\tau' = \min(t, s)$$

Portanto **o integral do ruído branco é um movimento Browniano**

$$B(t) = \int_0^t W_\tau d\tau$$

ou o ruído branco é uma "derivada" generalizada do movimento Browniano.

W_τ não é uma função; toma valores no espaço das distribuições.

As trajectórias do processo Browniano não são diferenciáveis

- O valor médio do quadrado de ΔB (a variância de ΔB) é proporcional a Δt.

$$E[|\Delta B|] \backsim \sqrt{\Delta t}$$

Donde $\frac{E[|\Delta B|]}{\Delta t} \backsim \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$

As trajectórias do processo Browniano não são diferenciáveis

- O valor médio do quadrado de ΔB (a variância de ΔB) é proporcional a Δt.

$$E[|\Delta B|] \backsim \sqrt{\Delta t}$$

  Donde $\frac{E[|\Delta B|]}{\Delta t} \backsim \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$

- **O processo Browniano tem variação total infinita**

$$TV(B) = \sup \sum_{k=0}^{n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)| \ ,$$

  Dividindo o intervalo em $\frac{T}{\Delta t}$ intervalos obtém-se a estimativa $\sqrt{\Delta t}\frac{T}{\Delta t}$ que diverge quando $\Delta t \to 0$. A trajectória tem comprimento infinito.

As trajectórias do processo Browniano não são diferenciáveis

- O valor médio do quadrado de ΔB (a variância de ΔB) é proporcional a Δt.

$$E[|\Delta B|] \backsim \sqrt{\Delta t}$$

Donde $\frac{E[|\Delta B|]}{\Delta t} \backsim \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$

- **O processo Browniano tem variação total infinita**

$$TV(B) = \sup \sum_{k=0}^{n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)| \ ,$$

Dividindo o intervalo em $\frac{T}{\Delta t}$ intervalos obtém-se a estimativa $\sqrt{\Delta t}\frac{T}{\Delta t}$ que diverge quando $\Delta t \to 0$. A trajectória tem comprimento infinito.

- **A variação quadrática é finita:**

$Q(B) = \lim_{\Delta t \to 0} Q_n(B) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (B(t_{k+1} - B(t_k))^2$

$$Q(B(T)) = T \qquad \text{(com probabilidade um)}$$

Martingales

Um processo estocástico é uma martingale se $E[F_s \mid \mathcal{F}_t] = F_t$ for $s > t$.
O movimento Browniano é uma martingale.
$F_2(t) = B_t^2 - t$ também.
Assim como $F_3(t) = B_t^3 - 3\int_0^t B(s)\, ds$.

Movimento Browniano e a equação do calor

A densidade de probabilidade do movimento Browniano

$$u(x,t) = G(0,x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{x^2/2t} \; .$$

para transições a partir da coordenada zero no tempo t, satisfaz

$$\partial_t G = \frac{1}{2} \partial_x^2 G \; .$$

G é solução da equação do calor com valor $\delta\left(x\right)$ para $t = 0$. Quer isto dizer que a solução da equação do calor $\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x^2 u$ com condição inicial $u_0\left(y\right)$ é

$$u(x,t) = \int_{y=-\infty}^{\infty} G(y,x,t) u_0(y) dy = \int_{y=-\infty}^{\infty} G(0,x-y,t) u_0(y) dy \; .$$

Isto é, a densidade de probabilidade do movimento Browniano é a função de Green da equação do calor. Esta soluçaõ pode também escrever-se

$$u\left(x,t\right) = E_x\left[u_0\left(X_t\right)\right]$$

Esta é a solução do problema com condições iniciais u_0.

Movimento Browniano e a equação do calor

Esperança condicional e a equação inversa:

$$f(x,t) = E[V(X_T) \mid X_t = x] = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,T-t)V(y)dy \ .$$

donde,

$$\partial_t f + \frac{1}{2}\partial_x^2 f = 0 \ .$$

Notar que o sinal de ∂_t é o oposto do da equação do calor (Equação inversa)
O problema do valor final:
Sabido $f(x,T) = V(x)$ pretende-se obter $f(\cdot, t)$ for $t < T$. É um problema bem posto resolvido pela equação inversa.

Integrais

- Dois tipos de integrais:
  1 - Integral no tempo: integral de Riemann de função contínua aleatória.
  2 - Integral em relação ao movimento Browniano. Ito e Stratonovich.

Integrais

- Dois tipos de integrais:
  1 - Integral no tempo: integral de Riemann de função contínua aleatória.
  2 - Integral em relação ao movimento Browniano. Ito e Stratonovich.
- Primeiro tipo $\quad Y = \int_0^T B(t)dt$

Integrais

- Dois tipos de integrais:
  1 - Integral no tempo: integral de Riemann de função contínua aleatória.
  2 - Integral em relação ao movimento Browniano. Ito e Stratonovich.
- Primeiro tipo $\quad Y = \int_0^T B(t)dt$
- Y é Gaussiano, sendo uma soma de variáveis Gaussianas, $Y = \lim_{\Delta t \to 0} Y_n = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k)$

Integrais

- Dois tipos de integrais:
  1 - Integral no tempo: integral de Riemann de função contínua aleatória.
  2 - Integral em relação ao movimento Browniano. Ito e Stratonovich.
- Primeiro tipo $\quad Y = \int_0^T B(t)dt$
- Y é Gaussiano, sendo uma soma de variáveis Gaussianas,
  $Y = \lim_{\Delta t \to 0} Y_n = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k)$
- Média e variância de Y : $\qquad E[Y_n] = 0$

$$
\begin{aligned}
E[Y_n^2] &= E[Y_n \cdot Y_n] = E\left[\left(\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k)\right) \cdot \left(\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} B(t_j)\right)\right] \\
&= \Delta t^2 \sum_{jk} E[B(t_k)B(t_j)] \, .
\end{aligned}
$$

Quando $\Delta t \to 0$, $\quad E[Y^2] = \int_{s=0}^T \int_{t=0}^T E[B_t B_s] dsdt =$
$= \int_{s=0}^T \int_{t=0}^T \min(s,t) dsdt = \frac{1}{3} T^3$

Aplicação: Verificar que

$$F(t) = B(t)^3 - 3\int_0^t B(s)ds$$

é uma martingale. Escolhe-se $t_2 > t_1$ e, para $t > t_1$, escreve-se $B(t) = B(t_1) + \Delta B(t)$. Então

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^{t_2} B(t)ds \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] = E\left[\left(\int_0^{t_1} B(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} B(t)dt\right) \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] \\ & = E\left[\int_0^{t_1} B(t)dt \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] + E\left[\int_{t_1}^{t_2} \left(B(t_1) + \Delta B(t)\right) dt \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] \\ & = \int_0^{t_1} B(t)dt + (t_2 - t_1)B(t_1) \end{aligned}$$

Usou-se $B(t) \in \mathcal{F}_{t_1}$ quando $t < t_1$, $B_{t_1} \in \mathcal{F}_{t_1}$, e $E[\Delta B(t) \mid \mathcal{F}_{t_1}] = 0$ quando $t > t_1$,

Integrais

Para $B(t)^3$,

$$\begin{aligned} & E\left[(B(t_1)+\Delta B(t_2))^3 \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] \\ = \quad & E\left[B(t_1)^3+3B(t_1)^2\Delta B(t_2)+3B(t_1)\Delta B(t_2)^2+\Delta B(t_2)^3 \mid \mathcal{F}_{t_1}\right] \\ = \quad & B(t_1)^3+3B(t_1)^2\cdot 0+3B(t_1)E[\Delta B(t_2)^2 \mid \mathcal{F}_{t_1}]+0 \\ = \quad & B(t_1)^3+3(t_2-t_1)B(t_1)\ . \end{aligned}$$

Portanto

$$E\left[F\left(t_2\right) \mid \mathcal{F}_{t_1}\right]=F\left(t_1\right)$$

Integrais e equações inversas

Total acumulado ao longo duma trajectória Browniana

$$f(x,t) = E_{x,t}\left[\int_t^T V(B(s))ds\right] .$$

A equação que $f\,(x,t)$ satisfaz é

$$\partial_t f + \frac{1}{2}\partial_x^2 f + V(x,t) = 0 ,$$

com condições finais $f(x,T) = 0$. **Prova:**

$$\int_t^T V(B(s))ds = \int_t^{t+\Delta t} V(B(s))ds + \int_{t+\Delta t}^T V(B(s))ds ,$$

$$f(x,t) = E_{x,t}\left[\int_t^{t+\Delta t} V(B(s))ds \mid \mathcal{F}_t\right] + E_{x,t}\left[\int_{t+\Delta t}^T V(B(s))ds \mid \mathcal{F}_t\right] .$$

Integrais e equações inversas

O primeiro termo é $V(x)\Delta t + o(\Delta t)$. Para o segundo

$$E_{x,t}\left[\int_{t+\Delta t}^{T} V(B(s))ds \mid \mathcal{F}_{t+\Delta t}\right] = F(B_{t+\Delta t}) = f(B(t+\Delta t), t+\Delta t)\ .$$

Escrevendo $B(t+\Delta t) = B(t) + \Delta B$, e usando $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+\Delta t}$

$$E\left[\int_{t+\Delta t}^{T} V(B(s))ds \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[f(B_t+\Delta B, t+\Delta t) \mid \mathcal{F}_t\right]\ .$$

$$f(x+\Delta B, t+\Delta t) = f(x,t) + \Delta t\partial_t f(x,t) + \Delta B\partial_x f(x,t) + \frac{1}{2}\Delta B^2\partial_x^2 f(x,t) +$$

$$E_{x,t}\left[f(x+\Delta B, t+\Delta t\right] = f(x,t) + \Delta t\partial_t f(x,t) + \frac{1}{2}\Delta t\partial_x^2 f(x,t) + o(\Delta t)\ .$$

$$f(x,t) = \Delta t V(x) + f(x,t) + \Delta t\partial_t f(x,t) + \frac{1}{2}\Delta t\partial_x^2 f(x,t) + o(\Delta t)\ .$$

Eliminando $f(x,t)$ e com $\Delta t \to 0$ obtém-se a equação. A equação pode ser usada para calcular o valor de expectação ou inversamente.

A formula de Feynman Kac

$$f(x,t) = E_{x,t}\left[e^{\int_t^T V(B_s)ds}\right] \qquad (1)$$

satisfaz a equação

$$\partial_t f + \frac{1}{2}\partial_x^2 f + V(x) f = 0 \, .$$

Prova: Cálculo semelhante ao anterior

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{\int_t^{t+\Delta t} V(B(s))ds + \int_{t+\Delta t}^T V(B(s))ds\right\} \\
= \;& \exp\left\{\int_t^{t+\Delta t} V(B(s))ds\right\} \cdot \exp\left\{\int_{t+\Delta t}^T V(B(s))ds\right\} \\
= \;& (1 + \Delta t V(B(t)) + o(\Delta t)) \cdot \exp\left\{\int_{t+\Delta t}^T V(B(s))ds\right\}
\end{aligned}$$

A expectação do lado direito em relação a $\mathcal{F}_{t+\Delta t}$ é

$$(1 + \Delta t V(X_t) + o(\Delta t)) \cdot f(X(t + \Delta X, t + \Delta t) \, .$$

Expectação em $\mathcal{F}_t$ e expansão de Taylor prova a equação

Integrais estocásticos. Ito e Stratonovich

Integrais em relação ao movimento Browniano $B(t)$ ($B(0) = 0$, $E[(\Delta B)^2] = \Delta t$).
O incremento de $B(t)$ no tempo dt representa-se por $dB(t)$, embora não seja um diferencial no sentido habitual. Não se pode escrever $dB(t) = \frac{dB}{dt}dt$ porque B não é diferenciável.
A propriedade de incrementos independentes implica que $dB(t)$ é independente de $dB(t')$ se $t \neq t'$.
O que é

$$Y(T) = \int_0^T F(t)dB(t) \;?$$

Integral de Ito:
Soma de Riemann: Com $F(t)$, $\mathcal{F}_t-$adaptado

$$Y_{\Delta t}(t) = \sum_{t_k<t} F(t_k)\Delta B_k \ ,$$

com $t_k = k\Delta t$ e $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$. Se o limite existir o integral de Ito é

$$Y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} Y_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_k<t} F(t_k) \left(B(t_k + \Delta t) - B(t_k) \right)$$

Usa-se $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$ e não $\Delta B_k = B(t_k) - B(t_{k-1})$! Portanto

$$E\left[F(t_k)\Delta B_k \mid \mathcal{F}_{t_k} \right] = 0$$

$Y_{\Delta t}$ é uma martingale. Para tempos discretos

$$E\left[Y_{\Delta t}(t_{n+1}) \mid \mathcal{F}_{t_n} \right] = Y_{\Delta t}(t_n) \ .$$

No limte $\Delta t \to 0$ conclui-se que $Y(t)$ também é uma martingale mensurável em $\mathcal{F}_t$.

$$Y(T) = \int_0^T B(t)dB(t) .$$

Se $B(t)$ fosse diferenciável, usando $dB(t) = \overset{\bullet}{B}(t)dt$ teriamos o resultado $Y(T) = \frac{1}{2}(B(T))^2$. Porém com

$$B(t_k) = \frac{1}{2}(B(t_{k+1}) + B(t_k)) - \frac{1}{2}(B(t_{k+1}) - B(t_k)) ,$$

$$\begin{aligned}
Y_{\Delta t}(t_n) &= \sum_{k<n} B(t_k)(B(t_{k+1}) - B(t_k)) \\
&= \sum_{k<n} \frac{1}{2}(B(t_{k+1}) + B(t_k))(B(t_{k+1}) - B(t_k)) \\
&\quad - \sum_{k<n} \frac{1}{2}(B(t_{k+1}) - B(t_k))(B(t_{k+1}) - B(t_k)) \\
&= \sum_{k<n} \frac{1}{2}\left(B(t_{k+1})^2 - B(t_k)^2\right) - \sum_{k<n} \frac{1}{2}(B(t_{k+1}) - B(t_k))^2 .
\end{aligned}$$

Integral de Ito: Um exemplo

Porque $B(0) = 0$, o primeiro termo do lado direito é

$$\frac{1}{2}B(t_n)^2$$

O segundo termo é uma soma de n variáveis independentes com valor médio $\Delta t/2$ e variância $\Delta t^2/2$. A soma será uma variável aleatória com valor médio $n\Delta t/2 = t_n/2$ e variância $n\Delta t^2/2 = t_n\Delta t/2$. Portanto

$$\frac{1}{2}\sum_{t_k<T}\left(B(t_{k+1}) - B(t_k)\right)^2 \longrightarrow T/2 \quad \text{quando} \quad \Delta t \longrightarrow 0\,.$$

Em conclusão:

$$\int_0^T B(t)dB(t) = \frac{1}{2}\left(B(t)^2 - T\right)\,.$$

O termo $\frac{T}{2}$ resulta da não diferenciabilidade de $B(t)$. Se $B(t)$ fosse diferenciável

$$\Delta t \int_0^T \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dt \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \Delta t \longrightarrow 0$$

Integral de Stratonovich

Se em vez de $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$ se tivesse feito $\Delta B_k = B(t_k) - B(t_{k-1})$, obtinha-se $\frac{1}{2}(B(T)^2 + T)$.
A definição de Stratonovich usa $\Delta B_k = \frac{1}{2}(B(t_{k+1}) - B(t_{k-1}))$.
Nesse caso tem-se $\frac{1}{2}B(T)^2$. Porém o integral de Stratonovich não é uma martingale.

Diferencial de Ito. (Formula de Ito)

O diferencial de Ito é obtido a partir do integral. Seja $F(t)$ um processo estocástico. Diz-se que $dF = a(t)dB(t) + b(t)dt$ se

$$F(T) - F(0) = \int_0^T a(t)dB(t) + \int_0^T b(t)dt \,.$$

Diferencial de Ito

$$d\left(B(t)^2\right) = 2B(t)dB(t) + dt$$

porque $\quad B(T)^2 = 2\int_0^T B(t)dB(t) + \int_0^T dt \,.$

Lema de Ito:

$$df(B(t),t) = \partial_1 f(B(t),t)dB(t) + \frac{1}{2}\partial_1^2 f(B(t),t)dt + \partial_2 f(B(t),t)dt \quad .$$

isto é,

$$\begin{aligned} & f(B(T),T) - f(B(0),0) \\ = \; & \int_0^T \partial_1 f(B(t),t)dB(t) + \int_0^T \left(\frac{1}{2}\partial_1^2 f(B(t),t) + \partial_2 f(B(t),t)\right) dt \end{aligned}$$

Lema de Ito

Prova do lema de Ito:
Define-se $\Delta t = T/n$, $t_k = k\Delta t$, $B_k = B(t_k)$, $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$ e $f_k = f(B_k, t_k)$,

$$f_n - f_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1} - f_k)$$

$E[(\Delta B)^2] = \Delta t$

$$f_{k+1} - f_k = \partial_w f_k \Delta B_k + \frac{1}{2}\partial_w^2 f_k \left(\Delta B_k\right)^2 + \partial_t f_k \Delta t + R_k \ ,$$

$$|R_k| \leq C\left(\Delta t^2 + \Delta t\,|\Delta B_k| + \left|\Delta B_k^3\right|\right) \ .$$

Separando $\left(\Delta B_k\right)^2$ do seu valor médio

$$\frac{1}{2}\partial_w^2 f_k \left(\Delta B_k\right)^2 = \frac{1}{2}\partial_w^2 f_k \Delta t + \frac{1}{2}\partial_w^2 f_k (\left(\Delta B_k\right)^2 - \Delta t) \ .$$

Lema de Ito

$$
\begin{aligned}
f_n - f_0 \quad = \quad & \sum_{k=0}^{n-1} \partial_w f_k \Delta B_k + \sum_{k=0}^{n-1} \partial_t f_k \Delta t + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \partial_w^2 f_k \Delta t \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \partial_w^2 f_k \left((\Delta B_k)^2 - \Delta t \right) + \sum_{k=0}^{n-1} R_k \ .
\end{aligned}
$$

Os últimos dois termos são de ordem maior que Δt. Portanto ao dividir por Δt e fazer $\Delta t \longrightarrow 0$, estes termos tendem para zero.

O lema de Ito é muito útil para calcular integrais estocásticos. Exemplo:

$$
d\left(\frac{1}{3} B(t)^3\right) = B^2(t) dB(t) + B(t) dt
$$

$$
\frac{1}{3} B(t)^3 = \int_0^T d\left(\frac{1}{3} B(t)^3\right) = \int_0^T B(t)^2 dB(t) + \int_0^T B(t) dt
$$

$$
\boxed{Y(T) = \int_0^T B(t)^2 dB(t) = \frac{1}{3} B(t)^3 - \int_0^T B(t) dt}
$$

Lema de Ito

Martingales:
Seja $F(t)$ um processo adaptado com $dF(t) = a(t)dB(t) + b(t)dt$. F é uma martingale se e só se $b(t) = 0$. We call $a(t)dB(t)$ é a parte martingale e $b(t)dt$ o termo de deriva. Porque $E[\int a(s)dB(s) \mid \mathcal{F}_t] = 0$ se $b(t)$ for contínuo, pode ser identificado através de

$$\begin{aligned} E\left[F(t+\Delta t) - F(t) \mid \mathcal{F}_t\right] &= E\left[\int_t^{t+\Delta t} b(s)ds \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= b(t)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Derivação duma equação inversa pelo lema de Ito

$$f(w,t) = E_{w,t}\left[\int_t^T V(B(s),s)ds\right]$$

$$F(t) = E\left[\int_t^T V(B(s),s)ds \mid \mathcal{F}_t\right] ,$$

Lema de Ito

$$
\begin{aligned}
E\left[F(t+\Delta t)-F(t)\mid\mathcal{F}_t\right] &= -E\left[\int_t^{t+\Delta t} V(B(s),s)ds \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= -V(B(t),t)\Delta t + o(\Delta t)\ .
\end{aligned}
$$

Isto significa que $dF(t) = a(t)dB(t) + b(t)dt$ com

$$b(t) = -V(B(t),t)\ .$$

Mas também, $b(t) = \partial_t f + \frac{1}{2}\partial_w^2 f$. Portanto,

$$\partial_t f + \frac{1}{2}\partial_w^2 f + V(w,t) = 0\ .$$

Isometria de Ito

Isometria de Ito:

$$E\left[\left(\int_{T_1}^{T_2} a(t)dB(t)\right)^2\right] = \int_{T_1}^{T_2} E[a(t)^2]dt \ .$$

Aproximando por uma soma

$$\sum_{T_1 \leq t_k < T_2} a(t_k)\Delta B_k \ .$$

Uma vez que os diferentes ΔB_k são independentes

$$\sum_{T_1 \leq t_k < T_2} a(t_k)^2 \Delta t \ .$$

Equações diferenciais estocásticas

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t) \ . \tag{2}$$

A solução é um processo adaptado que satisfaz (2), ist é

$$X(T) - X(0) = \int_0^T a(X(t), t)dt + \int_0^T \sigma(X(t), t)dB(t) \ ,$$

O primeiro é um integral de Riemann e o segundo um integral de Ito.
Condições iniciais $X(0) \sim u_0(x)$, em que $u_0(x)$ é uma densidade de probabilidade para $X(0)$. Dizer $X(0) = x_0$ é o mesmo que dizer $u_0(x) = \delta(x - x_0)$.

Movimento Browniano geométrico

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t) \tag{3}$$

$X(0) = 1$, com deriva $a(x, t) = \mu x$ e volatilidade $\sigma(x, t) = \sigma x$
Solução

$$X(t) = e^{\mu t - \sigma^2 t/2 + \sigma B(t)} \tag{4}$$

Verificação: Aplicação da formula de Ito

Propriedades do movimento Browniano geométrico

Consideremos o caso mais simples $\mu = 0$ $\sigma = 1$,

$$dX(t) = X(t)dB(t)$$

A solução com $X(0) = 1$ é

$$X(t) = \exp(B(t) - t/2) \tag{5}$$

$X(t)$ é agora uma martingale porque não há termo de deriva, $E[X(t + t') \mid \mathcal{F}_t] = X(t)$.
Porém, $B(t)$ tem ordem de grandeza $\sqrt{t}$. Para t grande, o expoente em (5) é aproximadamente igual a $-t/2$, donde

$$X(t) = \exp(B(t) - t/2) \approx e^{-t/2} \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty \quad a.s.$$

Portanto o valor médio $E[X(t)] = 1$, para t grande, não corresponde a trajectórias típicas, mas sim a trajectórias excepcionais. De facto

$$P(X(t) \geq 1) < e^{-t/4} \quad \text{para } t \text{ grande}$$

Exercícios

7 - *Verificar que*

$$F_2(t) = B_t^2 - t$$

é uma martingale

8 - *Verificar que*

$$X_t = X_0 e^{\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$$

é a solução de

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$