Nem tudo é Browniano, nem tudo é Gaussiano

R. Vilela Mendes
http://label2.ist.utl.pt/vilela/

Março 2010

Indice

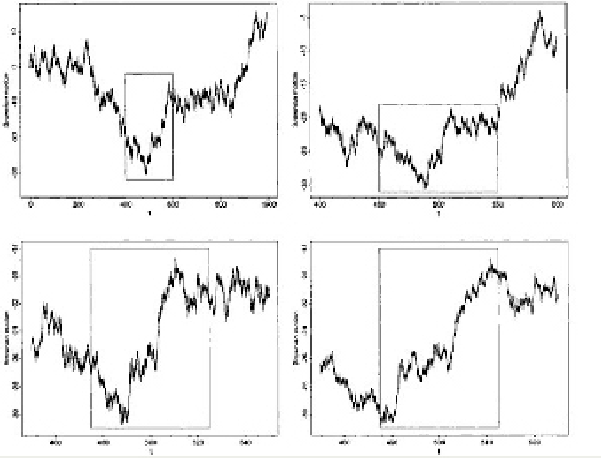
1. Nem tudo é Browniano

- Processos auto-semelhantes
- Autosemelhantes e com incrementos estacionários. Um teorema geral
- Movimento Browniano fraccionário
- Dependência longa
- Ruído fraccionário
- Representação do movimento Browniano fraccionário por integrais estocásticos
- Uma aplicação: reconstrução do processo de mercado

2. Nem tudo é Gaussiano

- Leis estáveis e infinitamente divisíveis.
- Formulas de Lévy-Khintchine
- Processos de Lévy
- Representação de Lévy-Ito
- Exemplos

O movimento Browniano (mB) é auto-semelhante



Processos auto-semelhantes com incrementos estacionários

- Um processo $\{X(t), t \geq 0\}$ é **autosemelhante** se para todo o **a** existe um **b** tal que

$$\{X(at)\} \stackrel{d}{=} \{bX(t)\}$$

$b = a^H$, e o processo diz-se $H-$autosemelhante (ou $H-$a.s.) - (ao H chama-se **expoente de Hurst**)
$H = \frac{1}{2}$ no caso do movimento Browniano

Processos auto-semelhantes com incrementos estacionários

- Um processo $\{X(t), t \geq 0\}$ é **autosemelhante** se para todo o **a** existe um **b** tal que

$$\{X(at)\} \stackrel{d}{=} \{bX(t)\}$$

$b = a^H$, e o processo diz-se $H-$autosemelhante (ou $H-$a.s.) - (ao H chama-se **expoente de Hurst**)
$H = \frac{1}{2}$ no caso do movimento Browniano
- Um processo tem **incrementos estacionários** *(i.e.)* se forem independentes do tempo todas as distribuições de

$$\{X(t+h) - X(t), t \geq 0\}$$

Processos auto-semelhantes com incrementos estacionários

- Um processo $\{X(t), t \geq 0\}$ é **autosemelhante** se para todo o **a** existe um **b** tal que
$$\{X(at)\} \overset{d}{=} \{bX(t)\}$$
$b = a^H$, e o processo diz-se $H-$autosemelhante (ou $H-$a.s.) - (ao H chama-se **expoente de Hurst**)
$H = \frac{1}{2}$ no caso do movimento Browniano
- Um processo tem **incrementos estacionários** *(i.e.)* se forem independentes do tempo todas as distribuições de
$$\{X(t+h) - X(t), t \geq 0\}$$
- O movimento Browniano é **autosemelhante**, tem **incrementos estacionários** e covariância
$$\mathbb{E}[X(t)X(s)] = \min(t, s) = \frac{1}{2}\{t + s - |t - s|\}$$

Processos auto-semelhantes com incrementos estacionários

- Um processo $\{X(t), t \geq 0\}$ é **autosemelhante** se para todo o **a** existe um **b** tal que
$$\{X(at)\} \stackrel{d}{=} \{bX(t)\}$$
$b = a^H$, e o processo diz-se $H-$autosemelhante (ou $H-$a.s.) - (ao H chama-se **expoente de Hurst**)
$H = \frac{1}{2}$ no caso do movimento Browniano
- Um processo tem **incrementos estacionários** *(i.e.)* se forem independentes do tempo todas as distribuições de
$$\{X(t+h) - X(t), t \geq 0\}$$
- O movimento Browniano é **autosemelhante**, tem **incrementos estacionários** e covariância
$$\mathbb{E}[X(t)X(s)] = \min(t,s) = \frac{1}{2}\{t+s-|t-s|\}$$
- Haverá outros processos auto-semelhantes e com incrementos estacionários?

Processos auto-semelhantes com incrementos estacionários

Teorema: *Se* $\{X(t), t \geq 0\}$ *tiver valores reais, fôr H-a.s., tiver incrementos estacionários e variância finita* ($\mathbb{E}\left[X(1)^2\right] < \infty$)*, então a sua covariância é*

$$\mathbb{E}\left[X(t)X(s)\right] = \frac{1}{2}\left\{t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right\}\mathbb{E}\left[X(1)^2\right]$$

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(t)X(s)\right] &= \tfrac{1}{2}\left\{\mathbb{E}\left[X^2(t)\right] + \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] - \mathbb{E}\left[(X(t)-X(s))^2\right]\right\} \\
&= \left\{\mathbb{E}\left[X^2(t)\right] + \mathbb{E}\left[X^2(s)\right] - \mathbb{E}\left[X^2(|t-s|)\right]\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right\}\mathbb{E}\left[X^2(1)\right]
\end{aligned}$$

O processo mais simples deste tipo é um processo Gaussiano chamado movimento Browniano fraccionário (mBf), $B_H(t)$, que se define de modo a ter média nula $\mathbb{E}\left[B_H(t)\right] = 0$. O mBf é o único processo Gaussiano H-a.s. com incrementos estacionários.

Dependência longa

- O movimento Browniano (mB) é um caso particular do mBf para $H = \frac{1}{2}$. O que é que o distingue dos outros?

Dependência longa

- O movimento Browniano (mB) é um caso particular do mBf para $H = \frac{1}{2}$. O que é que o distingue dos outros?
- **Dependência longa:** Para $\{X(t), t \geq 0\}$ H-a.s., i.e., 0<H<1 com $E\left[X(1)^2\right] < \infty$ define-se $\boxed{\xi(n) = X(n+1) - X(n)}$

$$r(n) = \mathbb{E}\left[\xi(0)\,\xi(n)\right] = \frac{1}{2}\left\{(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\right\}\mathbb{E}\left[X(1)^2\right]$$

$$\begin{array}{rcll} r(n) & \underset{n\to\infty}{\sim} & 2H(2H-1)\,n^{2H-2}\mathbb{E}\left[X(1)^2\right] & , \quad H \neq \frac{1}{2} \\ r(n) & = & 0 & , \quad H = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 0 < H < \frac{1}{2} & , & \sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| < \infty \\ H = \frac{1}{2} & , & \text{descorrelacionado} \\ \frac{1}{2} < H < 1 & , & \sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| = \infty \quad , \quad \text{dependência longa} \end{array}}$$

Dependência longa

- O movimento Browniano (mB) é um caso particular do mBf para $H = \frac{1}{2}$. O que é que o distingue dos outros?
- **Dependência longa:** Para $\{X(t), t \geq 0\}$ H-a.s., i.e., 0<H<1 com $E\left[X(1)^2\right] < \infty$ define-se $\boxed{\xi(n) = X(n+1) - X(n)}$

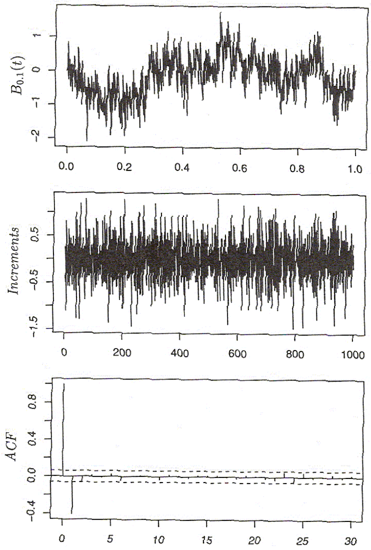
$$r(n) = \mathbb{E}\left[\xi(0)\,\xi(n)\right] = \frac{1}{2}\left\{(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\right\}\mathbb{E}\left[X(1)^2\right]$$

$$\begin{array}{rcll} r(n) & \underset{n\to\infty}{\sim} & 2H(2H-1)\,n^{2H-2}\mathbb{E}\left[X(1)^2\right] & , \quad H \neq \frac{1}{2} \\ r(n) & = & 0 & , \quad H = \frac{1}{2} \end{array}$$

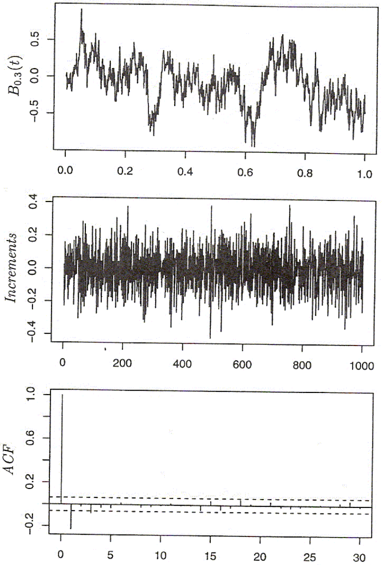
$$\boxed{\begin{array}{ccll} 0 < H < \frac{1}{2} & , & \sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| < \infty & \\ H = \frac{1}{2} & , & \text{descorrelacionado} & \\ \frac{1}{2} < H < 1 & , & \sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| = \infty & , \quad \text{dependência longa} \end{array}}$$

- $0 < H < \frac{1}{2}$, $r(n) < 0$, $n \geq 1$ (correlação negativa, processo anti-persistente),
  $\frac{1}{2} < H < 1$, $r(n) > 0$, $n \geq 1$ (correl. positiva, processo persistente).

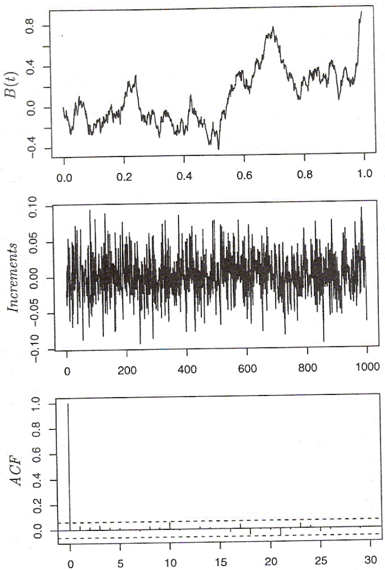
Movimento Browniano fraccionário (H=0.1)



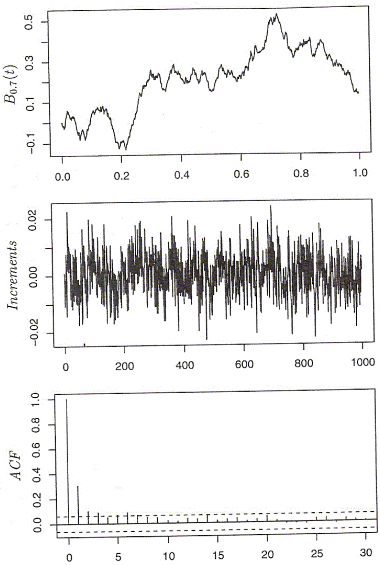
Movimento Browniano fraccionário (H=0.3)



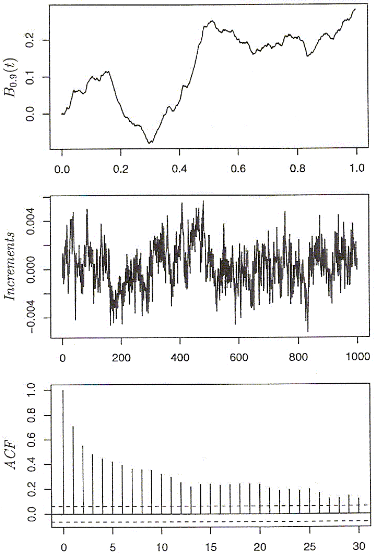
Movimento Browniano (H=0.5)



Movimento Browniano fraccionário (H=0.7)



Movimento Browniano fraccionário (H=0.9)



Autosemelhança e estacionaridade. Transformação de Lamperti

Se $Y(t)$ fôr um processo estacionário faça-se

$$X(t) = t^H Y(\log t)$$

então $X(t)$ é H-a.s.
Ao contrário, se $X(t)$ fôr H-a.s. e definirmos

$$Y(t) = e^{-tH} X\left(e^t\right)$$

então $Y(t)$ será estacionário.
Exemplo: Se $B(t)$ fôr um movimento Browniano então

$$Y(t) = e^{-\frac{t}{2}} B\left(e^t\right)$$

é estacionário.

Ruído fraccionário

- Ao processo

$$Y_t = B_H(t+1) - B_H(t)$$

chama-se *ruído Gaussiano fraccionário*

Ruído fraccionário

- Ao processo

$$Y_t = B_H(t+1) - B_H(t)$$

chama-se *ruído Gaussiano fraccionário*

- Grupo de renormalização

$$T_N : Y_t \rightarrow (T_N Y)_t = \frac{1}{N^H} \sum_{i=t}^{t+N-1} Y_i$$

Ruído fraccionário

- Ao processo

$$Y_t = B_H(t+1) - B_H(t)$$

chama-se *ruído Gaussiano fraccionário*

- Grupo de renormalização

$$T_N : Y_t \to (T_N Y)_t = \frac{1}{N^H} \sum_{i=t}^{t+N-1} Y_i$$

- **Teorema:** *Dentro da classe das sequências estacionárias, o ruído Gaussiano fraccionário é o único ponto fixo do grupo de renormalização*

Ruído fraccionário

- Ao processo

$$Y_t = B_H(t+1) - B_H(t)$$

chama-se *ruído Gaussiano fraccionário*

- Grupo de renormalização

$$T_N : Y_t \rightarrow (T_N Y)_t = \frac{1}{N^H} \sum_{i=t}^{t+N-1} Y_i$$

- **Teorema:** *Dentro da classe das sequências estacionárias, o ruído Gaussiano fraccionário é o único ponto fixo do grupo de renormalização*
- **Propriedades das trajectórias** do movimento Browniano fraccionário

Ruído fraccionário

- Ao processo

$$Y_t = B_H(t+1) - B_H(t)$$

chama-se *ruído Gaussiano fraccionário*

- Grupo de renormalização

$$T_N : Y_t \rightarrow (T_N Y)_t = \frac{1}{N^H} \sum_{i=t}^{t+N-1} Y_i$$

- **Teorema:** *Dentro da classe das sequências estacionárias, o ruído Gaussiano fraccionário é o único ponto fixo do grupo de renormalização*
- **Propriedades das trajectórias** do movimento Browniano fraccionário
- (Continuidade de Hölder de ordem γ)

$$P\left\{\omega \in \Omega, \sup \frac{|X(t,\omega) - X(s,\omega)|}{|t-s|^{\gamma}} \leq \delta\right\} = 1$$

Propriedades das trajectórias

- O mBf $\{B_H(t)\}$ tem uma versão contínua cujas trajectórias são contínuas Hölder de ordem $\beta \in [0, H)$ e que quase-seguramente não são contínuas Hölder de ordem $\gamma > H$.

Propriedades das trajectórias

- O mBf $\{B_H(t)\}$ tem uma versão contínua cujas trajectórias são contínuas Hölder de ordem $\beta \in [0, H)$ e que quase-seguramente não são contínuas Hölder de ordem $\gamma > H$.
- As trajectórias do mBf não têm variação limitada e não são diferenciáveis (q. s.).

Propriedades das trajectórias

- O mBf $\{B_H(t)\}$ tem uma versão contínua cujas trajectórias são contínuas Hölder de ordem $\beta \in [0, H)$ e que quase-seguramente não são contínuas Hölder de ordem $\gamma > H$.
- As trajectórias do mBf não têm variação limitada e não são diferenciáveis (q. s.).
- *$p-$variação V_p dum processo $X(t)$*

$$V_p(0,T) = \sup_{\text{partições}} \sum_{k=1}^{n} \left|X(t_k) - X(t_{k-1})\right|^p$$

Propriedades das trajectórias

- O mBf $\{B_H(t)\}$ tem uma versão contínua cujas trajectórias são contínuas Hölder de ordem $\beta \in [0, H)$ e que quase-seguramente não são contínuas Hölder de ordem $\gamma > H$.
- As trajectórias do mBf não têm variação limitada e não são diferenciáveis (q. s.).
- *$p-$variação V_p dum processo $X(t)$*

$$V_p(0, T) = \sup_{\text{partições}} \sum_{k=1}^{n} |X(t_k) - X(t_{k-1})|^p$$

- *índice I da $p-$variação*

$$I(X, [0, T]) = \inf\{p > 0; V_p(0, T) < \infty\}$$

Se H não for 1/2 o mBf não é uma semimartingale

- **Semimartingales:** Um processo chama-se uma semimartingale se tiver a seguinte (Doob-Meyer) decomposição

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

em que M_t é uma martingale (local) e A_t um processo contínuo à direita com variação finita. A variação quadrática duma martingale é finita q.s.

Se H não for 1/2 o mBf não é uma semimartingale

- **Semimartingales:** Um processo chama-se uma semimartingale se tiver a seguinte (Doob-Meyer) decomposição

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

em que M_t é uma martingale (local) e A_t um processo contínuo à direita com variação finita. A variação quadrática duma martingale é finita q.s.

- De $\mathbb{E}\left[\left|B_H\left(t\right) - B_H\left(s\right)\right|^{\alpha}\right] = \mathbb{E}\left[\left|B_H\left(1\right)\right|^{\alpha}\right]\left|t-s\right|^{\alpha H}$ conclui-se que

$$I\left(B_H, |0, T]\right) = \frac{1}{H}$$

O indice duma semimartingale deve pertencer a $[0,1] \cup \{2\}$. Portanto $B_H\left(t\right)$ não é uma semimartingale a menos que $H = \frac{1}{2}$

Representação do movimento Browniano fraccionário por integrais estocásticos

- Representação temporal

$$B_H(t) \stackrel{d}{=} C\left\{\int_{-\infty}^{0}\left((t-u)^{H-\frac{1}{2}}-(-u)^{H-\frac{1}{2}}\right)dB(u)+\int_{0}^{t}(t-u)^{H-\frac{1}{2}}\,dB(u)\right\}$$

Representação do movimento Browniano fraccionário por integrais estocásticos

- Representação temporal

$$B_H(t) \stackrel{d}{=} C\left\{\int_{-\infty}^{0}\left((t-u)^{H-\frac{1}{2}}-(-u)^{H-\frac{1}{2}}\right)dB(u)+\int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}}\,dB(u)\right\}$$

- Representação num intervalo finito

$$B_H(t) \stackrel{d}{=} C\int_0^t K(t,u)\,dB(u)$$

$$K(t,u) = \left\{\left(\frac{t}{u}\right)^{H-\frac{1}{2}}(t-u)^{H-\frac{1}{2}}-\left(H-\frac{1}{2}\right)u^{\frac{1}{2}-H}\int_u^t x^{H-\frac{3}{2}}(x-u)^{H-\frac{1}{2}}\,dx\right\}$$

Representação do movimento Browniano fraccionário por integrais estocásticos

- Representação temporal

$$B_H(t) \stackrel{d}{=} C\left\{\int_{-\infty}^{0}\left((t-u)^{H-\frac{1}{2}}-(-u)^{H-\frac{1}{2}}\right)dB(u)+\int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}}\,dB(u)\right\}$$

- Representação num intervalo finito

$$B_H(t) \stackrel{d}{=} C\int_0^t K(t,u)\,dB(u)$$

$$K(t,u)=\left\{\left(\frac{t}{u}\right)^{H-\frac{1}{2}}(t-u)^{H-\frac{1}{2}}-\left(H-\frac{1}{2}\right)u^{\frac{1}{2}-H}\int_u^t x^{H-\frac{3}{2}}(x-u)^{H-\frac{1}{2}}\,dx\right\}$$

- Representação espectral

$$B_H(t) \stackrel{d}{=} \frac{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,c(H)}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixt}-1}{ix}\,d\tilde{B}(x)$$

$$\tilde{B}(x)=B_1+iB_2,\; B_1(x)=B_1(-x),\; B_2(x)=-B_2(-x)$$

Representação do movimento Browniano fraccionário

- Representação em série de Paley-Wigner

$$B_H(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2i\omega_n t/T} - 1}{2i\omega_n t/T} Z_n$$

convergente em $t \in [0, T]$.
Os $\omega_n' s$ são os zeros reais da função de Bessel J_{1-H} e os Z_n são variáveis Gaussianas complexas independentes com média zero e variância

$$\mathbb{E}\left|Z_n\right|^2 = \begin{cases} (2-2H)^{-1}\Gamma^{-2}(1-H)\left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{-2H} J_{-H}^{-2}(\omega_n) V_T^{-1} & \omega_n \neq 0 \\ V_T^{-1} & \omega_n = 0 \end{cases}$$

$$V_T = \frac{\Gamma(3/2-H)}{2H\Gamma(H+1/2)\Gamma(3-2H)} T^{2-2H}$$

Uma aplicação: reconstrução do processo de mercado

Movimento Browniano geométrico como modelo de mercado ?

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB(t)$$

Consequências:

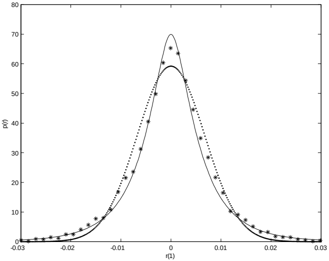
Os incrementos do preço seriam log-normais

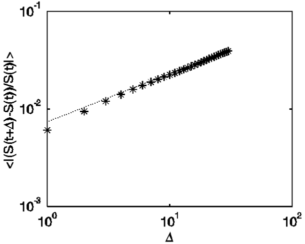
$$p\left(\ln \frac{S_T}{S_t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 (T-t)}} \exp\left(-\frac{\left(\ln \frac{S_T}{S_t} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2 (T-t)} \right)$$

e auto-semelhantes, Lei(X(at))=Lei(a^H X(t)) **com coeficiente de Hurst** $H = 1/2$

$$E\left|\frac{S(t+\Delta) - S(t)}{S(t)}\right| \approx \Delta^H$$

Porém





Modificação: A volatilidade como um processo

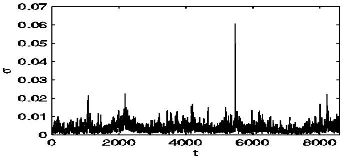
$$\frac{dS_t}{S_t}\left(\bullet,\omega^{'}\right) = \mu_t\left(\bullet,\omega^{'}\right)dt+\sigma_t\left(\bullet,\omega^{'}\right)dB\left(t\right)$$

que pode ser reconstruído a partir dos dados experimentais

$$\sigma_t^2\left(\bullet,\omega^{'}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{E\left(\log S_{t+\varepsilon}-\log S_t\right)^2\right\}$$

Uma aplicação: reconstrução do processo de mercado

Volatilidade (σ)

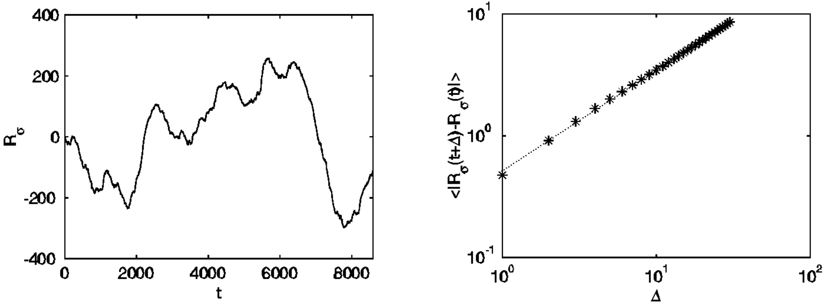


Resultado: O integral do logarítmo da volatilidade é bem representado por

$$\sum_{n=0}^{t/\delta} \log \sigma\left(n\delta\right) = \beta t + R_{\sigma}\left(t\right)$$

tendo $R_{\sigma}\left(t\right)$ propriedades de auto-semelhança

$$E\left|R_{\sigma}\left(t+\Delta\right) - R_{\sigma}\left(t\right)\right| \sim \Delta^{H}$$



$$\boxed{\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dB(t) \\ \log \sigma_t &= \beta + \frac{k}{\delta}\left\{B_H(t) - B_H(t-\delta)\right\} \end{aligned}}$$

δ é a escala de tempo de observação e H tem valores $0.8 - 0.9$

$$\sigma(t) = \theta e^{\frac{k}{\delta}\{B_H(t)-B_H(t-\delta)\} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 \delta^{2H}}$$

Parte II - Nem tudo é Gaussiano

Lembremos o teorema do limite central: Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com a mesma função de distribuição, com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Então se $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

Pergunta: O que é que acontece no caso geral, isto é, quando não se exige $\sigma^2 < \infty$?

Teorema (Lévy): Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com a mesma função de distribuição e suponhamos que existem constantes a_n, b_n tais que

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} F(x)$$

sendo $F(x)$ uma distribuição não degenerada. Então F é **estável**.

Leis estáveis e infinitamente divisíveis

Uma lei de probabilidade ser **estável** significa que dadas X_1 and X_2 com esta lei, existe $\alpha\left(a_1, a_2, b\right)$ tal que

$$X_3 = \frac{1}{\alpha}\left(a_1 X_1 + a_2 X_2 - b\right)$$

também tem a mesma lei. Isto é, as distribuições estáveis são aquelas que, a menos uma transformação linear, se reproduzem a si próprias por convolução. Em termos da função característica ϕ, estabilidade significa

$$\phi\left(a_1 \lambda\right) \phi\left(a_2 \lambda\right) = e^{i\lambda b} \phi\left(\alpha\lambda\right)$$

Usando as propriedades da função característica obtém-se:
A função característica $\phi\left(\lambda\right)$ duma distribuição estável, simétrica em torno da origem, é necessáriamente da forma

$$\phi\left(\lambda\right) = e^{-c|\lambda|^{\alpha}}$$

sendo $\alpha \in (0, 2]$. O caso $\alpha = 2$ é o caso da distribuição Gaussiana. Se a variância fosse finita, o limite seria uma distribuição Gaussiana, portanto os outros casos correspondem a distribuições com variância infinita.

Uma distribuição de probabilidade P_X duma variável aleatória X chama-se **infinitamente divisível** se para todo o n existirem variáveis aleatórias $X_1^{(1/n)} \cdots X_n^{(1/n)}$ tais que

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(1/n)} + \cdots + X_n^{(1/n)}$$

isto é

$$P_X = P_{X_1^{(1/n)}} * \cdots * P_{X_n^{(1/n)}}$$

Caracterização pela função característica

$$\phi(\lambda) = \left(\phi_{X^{(1/n)}}(\lambda)\right)^n$$

Exemplos: **Distribuição Gaussiana**

$$\begin{aligned}\phi_X(\lambda) &= \exp\left(i\lambda\mu - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right) = \left(\exp\left(i\lambda\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}\lambda^2\frac{\sigma^2}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(\phi_{X^{(1/n)}}(\lambda)\right)^n\end{aligned}$$

Poisson

$$\begin{aligned}\phi_X(\lambda) &= \exp\left(\mu\left(e^{i\lambda}-1\right)\right) = \left(\exp\left(\frac{\mu}{n}\left(e^{i\lambda}-1\right)\right)\right)^n \\ &= \left(\phi_{X^{(1/n)}}(\lambda)\right)^n\end{aligned}$$

A distribuição de Poisson é

$$P(X=n) = \mu^n \frac{e^{-\mu}}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

- Uma distribuição estável é infinitamente divisível, mas o contrário não é necessáriamente verdadeiro.
- O produto dum número finito de funções características infinitamente divisíveis é uma função característica que também é infinitamente divisível
- Se ϕ fôr infinitamente divisível $|\phi|$ também o é, mas o contrário é em geral falso.

Leis estáveis e infinitamente divisíveis. Caracterização geral, Lévy-Khintchine

Leis estáveis (não necessáriamente simétricas)

$$\phi(\lambda) = \exp\left\{ i\gamma\lambda - c|\lambda|^{\alpha}\left[1 + i\beta\frac{\lambda}{|\lambda|}w(\lambda,\alpha)\right]\right\}$$

$\gamma \in R, 0 < \alpha \leq 2, |\beta| \leq 1, c \geq 0$

$$w(\lambda,\alpha) = \begin{cases} \tan\frac{\pi\alpha}{2} & , \quad \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\log|\lambda| & , \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

Leis infinitamente divisíveis

$$\phi_X(\lambda) = E\left[e^{i\lambda X}\right] = \exp\left\{ ib\lambda - \frac{\lambda^2 c}{2} + \int_R \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbf{1}_{|x|<1}\right)\nu(dx)\right\}$$

com

$$\nu(\{0\}) = 0 \qquad \int_R \left(1 \wedge |x|^2\right)\nu dx < \infty$$

Processos

O movimento Browniano fraccionário (*uma versão do*) tem trajectórias contínuas
Uma noção mais fraca é a noção de processo càdlàg (trajectórias contínuas à direita e com limite à esquerda)

- **Processo de Lévy**
  a) $X(0) = 0$
  b) continuidade estocástica para todo o $t \geq 0$.
  $(\forall \varepsilon, \lim_{s \to t} P(|X_t - X_s| > \varepsilon) = 0)$
  c) incrementos independentes e estacionários
  d) trajectórias contínuas à direita e com limite à esquerda q. s.
  Exemplos: deriva linear, Bm, Poisson, Lévy salto-difusão

Caracterização dos processos de Lévy

Recordemos a representação da função característica das leis infinitamente divisíveis

$$
\begin{aligned}
\phi_X(\lambda) &= E\left[e^{i\lambda X}\right] = \exp\left\{ ib\lambda - \frac{\lambda^2 c}{2} + \int_R \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbf{1}_{|x|<1}\right)\nu(dx\right. \\
&= \exp\{\Psi(\lambda)\}
\end{aligned}
$$

com

$$
\nu(\{0\}) = 0 \qquad \int_R \left(1 \wedge |x|^2\right)\nu dx < \infty
$$

Consideremos agora um processo de Lévy que vamos decompor

$$
X_t = X_1 + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_t - X_{t-1})
$$

como os incrementos são independentes e estacionários conclui-se que X_t é infinitamente divisível. Portanto para um processo de Lévy temos

$$
E\left[e^{i\lambda X_t}\right] = \exp\{t\Psi(\lambda)\}
$$

$b \longrightarrow$ **deriva**, $c \longrightarrow$**difusão**, $\nu \longrightarrow$**medida de salto**

Decomposição de Lévy-Ito

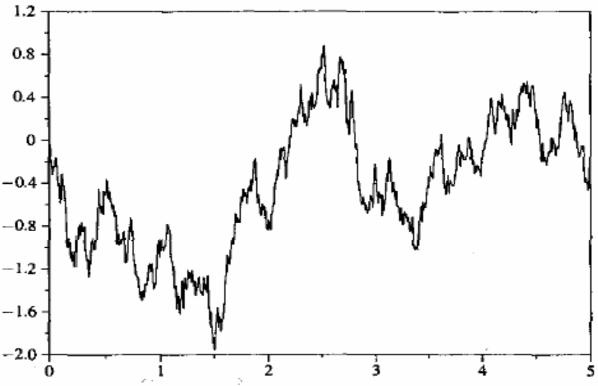
Corresponde à decomposição do expoente de Lévy $\Psi(\lambda)$ nas seguintes partes:

$$\begin{aligned}
\Psi^{(1)}(\lambda) &= ib\lambda \\
\Psi^{(2)}(\lambda) &= \frac{\lambda^2 c}{2} \\
\Psi^{(3)}(\lambda) &= \int_{|x|\geq 1} \left(e^{i\lambda x} - 1\right) \nu(dx) \\
\Psi^{(4)}(\lambda) &= \int_{|x|<1} \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x\right) \nu(dx)
\end{aligned}$$

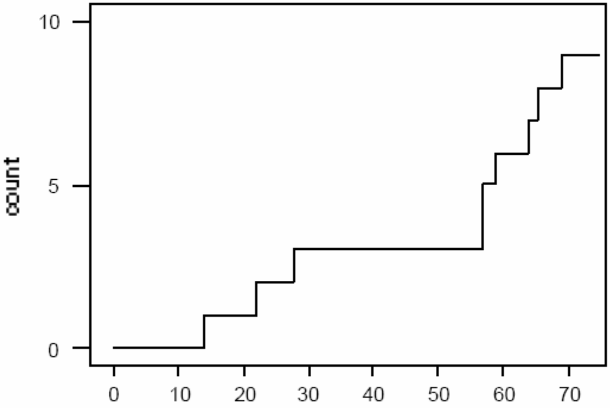
$\Psi^{(1)}(\lambda)$ corresponde a uma deriva constante, $\Psi^{(2)}(\lambda)$ é um movimento Browniano, $\Psi^{(3)}(\lambda)$ um processo de Poisson composto e $\Psi^{(4)}(\lambda)$ uma martingale com um número contável de saltos de amplitude menor que um em cada intervalo de tempo finito.

Exemplos de processos de Lévy

Movimento Browniano

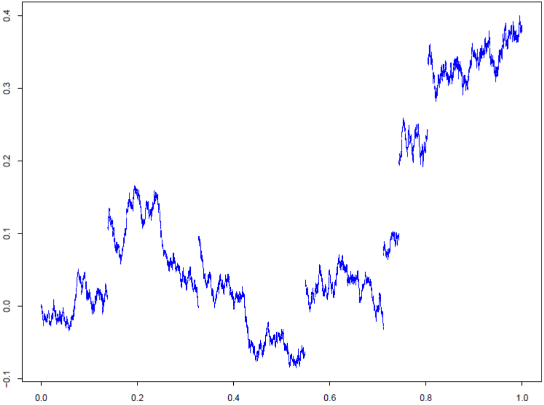


Processo de Poisson

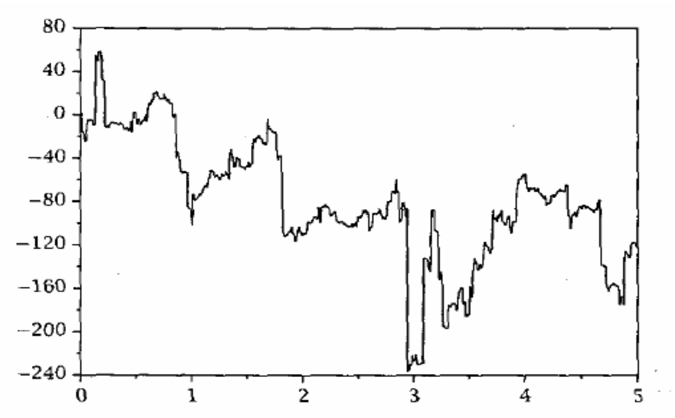


Exemplos de processos de Lévy

Difusão e saltos

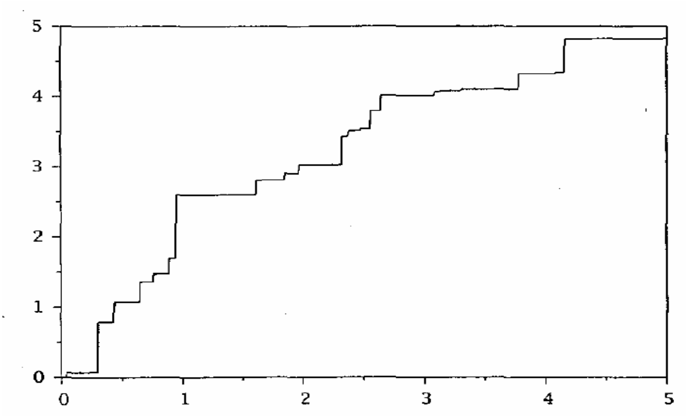


Processo de Cauchy



Exemplos de processos de Lévy

Subordinador



Algumas referências para aprofundar os temas do curso

- **Probabilidades e processos**
  R. Durrett; *Probability. Theory and examples*, Brooks/Cole 2002.
  O. Kallenberg; *Foundations of modern probability*, Springer 2002.
  P. Embrechts e M. Maejima; *Selfsimilar processes*, Princeton Univ. Press 2002.
  L. J. S. Allen; *An introduction to stochastic processes with applications to biology*, Pearson Prentice-Hall 2003.
- **Finanças e matemática financeira**
  J. C. Hull; Risk management and financial institutions, Pearson Prentice-Hall 2007
  Y.-D. Lyuu; *Financial engineering and computation*, Cambridge Univ. Press 2002.
  M. Baxter e A. Rennie; *Financial calculus*, Camb. Univ. Press 1996.
  H. Föllmer e A. Schied; *Stochastic Finance*, W. de Gruyter 2002.
  N. El Karoui; *Couverture des risques dans les marchés financiers*, www.cmap.polytechnique.fr/~elkaroui/masterfin034.pdf