MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2020/2021

Trabalhos Finais (14/12/2020)

Para a realização dos trabalhos tenha em conta os seguintes pontos:

- Os trabalhos finais são realizados em grupo e serão sujeitos a uma discussão final. Cada grupo deve escolher um único trabalho.
- Todos os trabalhos realizados devem ser escritos em **C** em ambiente de janelas;
- Para construir a(s) janela(s) a utilizar no programa deve ser usada a biblioteca GTK+ descrita durante as aulas;
- Os parâmetros, bem como as ordens de execução, para a realização dos objectivos do trabalho devem poder ser dados, em tempo real, a partir das janelas de execução do programa;
- As escalas dos eixos, sempre que tal se justifique, devem poder ser alteradas a partir da janela.
- Deverão existir, sempre que tal se justifique, botões que permitam parar, continuar e recomeçar as representações gráficas com novos valores.
- Ao iniciar-se o programa, devem estar introduzidos os valores que permitam executar uma demonstração.
- Os cálculos efectuados para as representações gráficas deverão resultar da resolução numérica da(s) equação(ões) diferencial(is) e não a partir de soluções gerais conhecidas.
- No que respeita às dimensões do sistema, estas deverão ser implicitamente definidas internamente pelo programa de modo a ele se ajustar correctamente às dimensões do ecrã.
- Os trabalhos realizados deverão ainda ser acompanhados por um pequeno texto explicativo (cerca de duas páginas) escrito em TeX ou em LaTeX.

MEFT - Programação

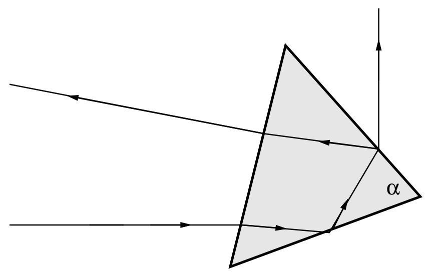
1º Ano - 1º Semestre de 2020/2021

Trabalhos Finais (14/12/2020)

1. Prisma

Considere um prisma de um material que permita a propagação do raio refractado e um raio que nele incide. Obtenha os raios refletidos e os raios refractados.

O prisma é, em corte, um triângulo isósceles de ângulo 'α' como se mostra na figura.



O utilizador deve poder fazer variar o ângulo 'α', mover para cima e para baixo o raio incidente e ainda poder rodar o prisma em relação a um eixo fixo perpendicular ao plano na figura.

Devem ser criadas opções que permitam mostrar apenas o raio incidente e o(s) raio(s) emergente(s) ou o percurso total.

Tendo em conta que uma parte do feixe é refletida na superfície de separação dos meios deve ser possível ainda mostrar as duas primeiras reflexões no interior do prisma.

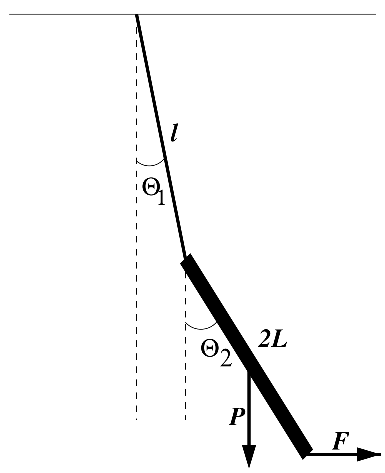
O programa deverá ter ainda uma opção em que o feixe incidente seja constituído pelo menos duas frequências diferentes (com uma pequena variação do índice de refracção) e que mostra o que se observa.

Deverá ainda ser possível fazer variar o índice de refracção do prisma. Admita que, no exterior, o índice de refracção é 1.

Finalmente, para uma mais fácil visualização, as alterações efectuadas nos parâmetros do sistema deverão ser imediatamente observadas na sua representação.

2. Pêndulo e barra suspensa com força aplicada

Considere o sistema constituído por um fio sem massa de comprimento ℓ e por uma barra de comprimento $2\,L$ e massa M que encontra a ele ligado. O sistema oscilada no plano da figura.



O sistema encontra-se sujeito à acção da gravidade (para baixo) e, na extremidade da barra, é aplicada uma força horizontal constante, $\vec{F}$, como se mostra na figura.

Pretende-se construir um programa que represente o sistema ao lado. Assim, o programa deverá começar com uma configuração predefinida e permitir a introdução e alteração dos valores de cada um dos parâmetros do sistema (ℓ, M, L, F e velocidades e posições iniciais).

Para além do movimento do sistema, deverá igualmente ser possível visualizar, em tempo real, os gráficos dos ângulos Θ_1 e Θ_2 e respectivas velocidades angulares em função do tempo, de cada uma dessas velocidades angulares em função do respectivo ângulo e ainda de Θ_2 em função de Θ_1. Deverá ainda ser possível ajustar a amplitude dos gráficos.

MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2020/2021

Trabalhos Finais (14/12/2020)

3. Força electromagnética

Tendo em conta que a força electromagnética $\vec{F}$ que actua uma partícula de carga eléctrica q e velocidade $\vec{v}$ é dada pela expressão

$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

em que $\vec{E}$ é o campo eléctrico e $\vec{B}$ o campo de indução magnético e '$\times$' é o produto externo.

Calcule e represente graficamente o movimento de uma partícula de carga 'q' e massa 'm', que se desloca, no plano do ecrã, com velocidade $\vec{v}$ a partir da posição $\vec{r}_0$.

Considere ainda que o campo magnético é perpendicular ao plano da representação e que o campo eléctrico é zero na direcção perpendicular ao plano da figura.

O utilizador deverá poder escolher e alterar dinamicamente os de 'B', '$\vec{E}$', 'q', 'm', $\vec{v}$' e '$\vec{r}_0$' devendo ser visualizada, em tempo real, a sua alteração, assim, as alterações efectuadas nos parâmetros do sistema deverão ser imediatamente observadas na sua representação.

No início, o programa deverá iniciar-se com um conjunto de valores pre-definido que funcionará como exemplo.

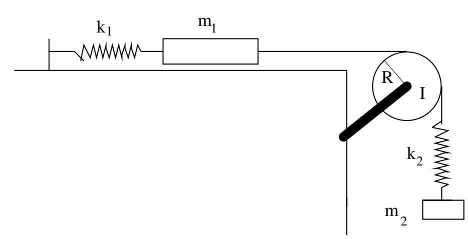
A representação deve permitir, como se disse atrás, que a alteração dos valores seja visualizada em tempo real e deverá ser possível optar pela visualização das trajectórias ou por ver o movimento de uma partícula.

Para simplificar, utilize unidades adaptadas à visualização do movimento.

4. Sistemas de duas molas, duas massas e uma roldana

Considere o sistema da figura ao lado constituído por duas molas de constantes elásticas k_1 e k_2, duas massas, m_1 e m_2, estando m_2 sujeita à acção da gravidade e uma roldana de momento de inércia I.

Admita a roldada aproximamente como um disco cilíndrico uniforme com momento de inércia $I = M\,R^2/2$, que massas das molas e do fio podem ser desprezáveis face às restantes massas e que o fio não desliza na roldana. Pode igualmente desprezar os efeitos resultantes do atrito nas diferentes componentes do sistema.



O utilizador deverá ter à sua disposição a possibilidade de alterar, em tempo real, as massas dos objectos (ou o momento de inércia no caso da roldana), as constantes das molas e as posições e velocidades iniciais das duas massas.

O programa deverá ainda poder apresentar os gráficos das posições e velocidades das duas massas, o ângulo e velocidade angular da roldana e a velocidade angular da roldana em função do seu ângulo de rotação. Deverá ainda ser possível ajustar a amplitude dos gráficos.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

2. Pêndulo e barra suspensa com força constante aplicada

A posição do centro de massa da barra é:

$$\vec{r} = (\ell\, sin\theta_1 + L\, sin\theta_2)\, \vec{e}_x + (\ell\, cos\theta_1 + L\, cos\theta_2)\, \vec{e}_y$$

e a sua velocidade é:

$$\vec{v} = (\ell\, \dot{\theta}_1\, cos\theta_1 + L\, \dot{\theta}_2\, cos\theta_2)\, \vec{e}_x - (\ell\, \dot{\theta}_1\, sin\theta_1 + L\, \dot{\theta}_2\, sin\theta_2)\, \vec{e}_y$$

A energia cinética será então:

$$T = \frac{1}{2}\, M\, \vec{v}^2 + \frac{1}{2}\, I\, \dot{\theta}_2^2$$

em que o momento de inércia é $I = M\, R^2/2 = M\,(2L)^2/2 = M\, L^2/3$, logo:

$$T = \frac{1}{2}\, M\, (\ell^2\, \dot{\theta}_1^2 + L^2\, \dot{\theta}_2^2 + 2\, \ell\, L\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2\, cos(\theta_1 - \theta_2)) + \frac{1}{6}\, M\, L\, \dot{\theta}_2^2$$

Para a energia potencial gravítica e da força horizontal, tem-se:

$$V_g = -M\, g\, (\ell\, cos\theta_1 + 2\, L\, cos\theta_2)$$

$$V_F = -\int \vec{F}.d\vec{r} = -F(\ell\, sin\theta_1 + 2\, L\, sin\theta_2)$$

logo

$$V = -M\, g\, (\ell\, cos\theta_1 + 2\, L\, cos\theta_2) - F(\ell\, sin\theta_1 + 2\, L\, sin\theta_2)$$

De onde se obtem o Lagrangiana do sistema (L = T - V):

$$L = \frac{1}{2}\, M\, (\ell^2\, \dot{\theta}_1^2 + L^2\, \dot{\theta}_2^2 + 2\, \ell\, L\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2\, cos(\theta_1 - \theta_2)) + \frac{1}{6}\, M\, L\, \dot{\theta}_2^2 + M\, g\, (\ell\, cos\theta_1 + 2\, L\, cos\theta_2) + F(\ell\, sin\theta_1 + 2\, L\, sin\theta_2)$$

Aplicando as equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

tem-se:

$$\begin{cases} M\, \ell\, \ddot{\theta}_1 + M\, L\, cos(\theta_1 - \theta_2)\, \ddot{\theta}_2 + M\, L\, sin(\theta_1 - \theta_2)\, \dot{\theta}_2^2 = -M\, g\, sin\theta_1 + F\, cos\theta_1 \\ \frac{4}{3}\, M\, L\, \ddot{\theta}_2 + M\, \ell\, cos(\theta_1 - \theta_2)\, \ddot{\theta}_1 - M\, \ell\, sin(\theta_1 - \theta_2)\, \dot{\theta}_1^2 = -M\, g\, sin\theta_2 + 2\, F\, cos\theta_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema em ordem a $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$, obtêm-se as equações em ordem a θ_1 e a θ_2.

MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2020/2021

Trabalhos Finais (14/12/2020)

4. Sistemas de duas molas, duas massas e uma roldana

Uma vez que a força da gravidade a actuar sobre o sistema massa-mola apenas dá origem ao deslocamento da posição de equilíbrio em torno da qual o corpo oscila, pode integrar-se este desvio nas coordenadas ao defini-las como os desvios em relação à posição de equilíbrio do sistema.

Têm-se então como coordenadas, x_1 e x_2 (desvios da posição de equilíbrio das massas m_1 e m_2) e θ (ângulo de rotação da roldana). No entanto, θ e x_1 estão relacionadas pela relação:

$$x_1 = -R\,\theta$$

em que o sentido positivo eixo dos xx' é definido da esquerda para a direito e o do eixo dos yy' para cima.

Assim, as energias cinética e potencial do sistemas são dadas por:

$$T = \tfrac{1}{2}\,m_1\,\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2\,\dot{x}_2^2 + \tfrac{1}{2}\,I\,\dot{\theta}^2$$

$$V = \tfrac{1}{2}\,k_1\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,k_2\,(x_1 + x_2)^2$$

Simplificando

$$T = \tfrac{1}{2}\,(m_1 + \tfrac{I}{R^2})\,\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2\,\dot{x}_2^2$$

$$V = \tfrac{1}{2}\,(k_1 + k_2)\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,k_2\,x_2^2 + k_2\,x_1\,x_2$$

Tendo em conta que o Lagrangeano do sistema é dado por $L = T - V$, tem-se:

$$L = \tfrac{1}{2}\,(m_1 + \tfrac{I}{R^2})\,\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2\,\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}\,(k_1 + k_2)\,x_1^2 - \tfrac{1}{2}\,k_2\,x_2^2 - k_2\,x_1\,x_2$$

e usando as equações de Lagrange

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \tfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

tem-se

$$(m_1 + \tfrac{I}{R^2})\,\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\,x_1 + k_2\,x_2 = 0$$

$$m_2\,\ddot{x}_2 + k_2\,x_1 + k_2\,x_2 = 0$$