MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2018/2019

Trabalhos Finais (03/12/2018)

Para a realização dos trabalhos tenha em conta os seguintes pontos:

- Os trabalhos finais são realizados em grupo e serão sujeitos a uma discussão final. Cada grupo deve escolher um único trabalho.
- Todos os trabalhos realizados devem ser escritos em **C** em ambiente de janelas;
- Para construir a(s) janela(s) a utilizar no programa deve ser usada a biblioteca GTK+ descrita durante esta cadeira;
- Os parâmetros, bem como as ordens de execução, para a realização dos objectivos do trabalho devem poder ser dados, em tempo real, a partir das janelas de execução do programa;
- As escalas dos eixos, sempre que tal se justifique, devem poder ser alteradas a partir da janela.
- Deverão existir, sempre que tal se justifique, botões que permitam parar, continuar e recomeçar as representações gráficas com novos valores.
- Concluído um gráfico, o utilizador deve ter possibilidade de optar por sobrepor um novo gráfico (quando isso tiver cabimento) ao já existente ou fazer um novo desde o início. Deverá ainda ser possível dar a ordem de limpar um gráfico já existente.
- Ao iniciar-se o programa, devem estar introduzidos os valores que permitam executar uma demonstração.
- Os cálculos efectuados para as representações gráficas deverão resultar da resolução numérica da(s) equação(ões) diferencial(is) e não a partir de soluções gerais conhecidas.
- No que respeita às dimensões do sistema, estas deverão ser implicitamente definidas internamente pelo programa de modo a ele se ajustar correctamente às dimensões do ecrã.
- Os trabalhos realizados deverão ainda ser acompanhados por um pequeno texto explicativo (cerca de duas páginas) escrito em TeX ou em LaTeX.

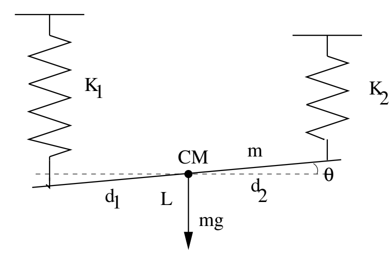
MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2018/2019

Trabalhos Finais (03/12/2018)

1. Sistema de duas molas e uma vara suspensa para pequenas oscilações

Pretende-se representar, para pequenas oscilações, o movimento do sistema apresentado na figura ao lado constituído por uma vara de comprimento L e massa m suspensa por duas molas de constantes K_1 e K_2 e comprimentos naturais respectivamente ℓ_1 e ℓ_2. O movimento dá-se a duas dimensões no plano vertical, sujeito assim à acção da gravidade. Para simplificar admita que pode desprezar a massa das molas.



O programa deverá começar com uma configuração predefinida e deverá permitir a introdução e alteração dos valores de cada um dos parâmetros do sistema bem como da posição e velocidade iniciais do centro da vara e do ângulo que ela faz com a horizontal e sua velocidade angular.

Para além do movimento do sistema, deverá ainda ser possível visualizar, em tempo real, os seguintes gráficos:

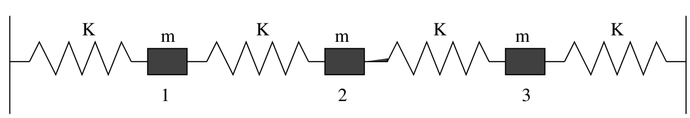
- Ângulo da barra com a horizontal em função do tempo;
- Posição do centro de massa do sistema em função do tempo;
- Posição do centro de massa do sistema em função do ângulo com a horizontal;

Poderá escolher se os três gráficos são apresentados simultaneamente ou um por um à escolha do utlilizador. No caso dos dois primeiros deverá ser possível ajustar a escala do tempo.

Ver: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/varilla_muelles/varilla_muelles.html

2. Sistema de quatro molas e três massas sujeito a uma força exterior

Pretende-se descrever o sistema constituído por quatro molas iguais que se ligam a três massas também iguais como se mostra na figura abaixo. Sobre a massa 1 actua uma força períodica de tipo sinosoidal da forma '$F_o \, cos(\omega \, t)$'.



O programa deverá começar com uma configuração predefinida e deverá permitir a introdução e alteração dos valores de cada um dos parâmetros do sistema bem como as posições e velocidades iniciais das massas.

Para além do movimento do sistema, deverá ainda ser possível visualizar, em tempo real, gráficos da posição de cada uma das massas em função do tempo sobrepondo-os e ajustar a escala do tempo. Deverá ainda ser possível ao utilizador dizer para que partícula deseja visualizar o gráfico da velociadade em função da posição.

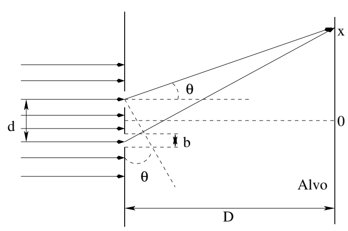
MEFT - Programação

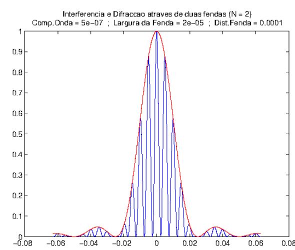
1º Ano - 1º Semestre de 2018/2019

Trabalhos Finais (03/12/2018)

3. Difracção por duas fendas

Pretende-se fazer o estudo dos fenómenos de difracção e interferência quando um feixe de luz monocromático de comprimento de onda, λ, atravessa um sistema constituído por duas fendas, como se mostra na figura abaixo.





A largura das fendas é 'b', a distância entre elas 'd' e a distância em relação ao alvo 'D'.

Faça a simulação deste sistema mostrando o resultado dos fenómenos de difracção e interferência quando se fazem variar os parâmetros dos sistema (λ, b, d). Para esta demonstração utilize cursores os outros processos equivalentes que permitam visualizar, em tempo real, a evolução da imagem produzida no alvo.

Deverá ainda ser possível guardar o resultado duma configuração com vista a podê-la comparar com a configuração actual.

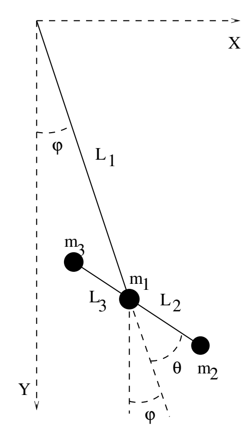
Incluia ainda uma opção que permita mostrar ou não a curva envolvente.

4. Baloiço

O movimento de um baloiço quando uma criança oscila as pernas, pode ser aproximadamente representado na figura ao lado.

Pretende-se mostrar o movimento dum baloiço com uma criança (representada esquematicamente pelas massas 'm_1', 'm_2' e 'm_3' e respectivas posições 'L_1', 'L_2' e 'L_3'). O balanço pode ser representado aproximadamente pela imposição de um movimento em θ dado por $\theta = \theta_o\, cos(\omega\, t)$ que corresponde a uma força imposta ao sistema.

Os valores das massas, comprimentos, ângulos e velocidades iniciais devem poder ser alterados pelo utilizador no decurso do programa. Deve ainda ser disponibilizado ao utilizador um processo que permita alterar o fluxo do tempo (andar mais depressa ou mais devagar).



Deverão ainda poder ser visualizados os seguintes gráficos $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\theta(t)$ e $\varphi(\theta)$ No caso dos três primeiros deverá ser possível ajustar a escala do tempo.

Bibliografia:

1. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/columpio_1/columpio_1.html

2. https://www.researchgate.net/publication/252276262_The_pumping_of_a_swing_from_the_seated_position

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

1. Sistema de duas molas e uma vara suspensa para pequenas oscilações

Considerando x_1 e x_2 os desvios em relação ao comprimento natural das molas, tem-se que as forças em jogo são

$$F_1 = -K_1\, x_1 \qquad F_2 = -K_2\, x_2 \qquad P = -m\, g$$

e assim, o sistema está em equilíbrio quando a resultante das forças e a resultante dos momentos das Forças forem zero:

$$\begin{cases} K_1 x_1 + K_2 x_2 - mg = 0 \\ -K_1 x_1 d_1 + K_2 x_2 d_2 = 0 \end{cases}$$

de onde se tiram as coordenadas para a posição de equilíbrio:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{mg}{K_1}\frac{d_2}{d_1+d_2} \\ x_2 = \frac{mg}{K_2}\frac{d_1}{d_1+d_2} \end{cases}$$

Assim, as forças das molas são respectivamente:

$$F_1 = -K_1\,(y_1 - x_1) \qquad F_2 = -K_2\,(y_2 - x_2)$$

a resultante de forças que se exerce sobre o centro de massa do sistema (em que y é a posição do centro de massa da vara):

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -K_1\,(y_1 - x_1) - K_2\,(y_2 - x_2) - m\,g$$

e substituindo x_1 e x_2, tem-se

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -K_1\,y_1 - K_2\,y_2$$

E a resultante momento das forças (em que θ é o ângulo entre a vara e a horizontal):

$$I_c\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K_2\,(y_2 - x_2)\,d_2 + K_1\,(y_1 - x_1)\,d_1$$

e substituindo x_1 e x_2, tem-se

$$I_c\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K_2\,y_2\,d_2 + K_1\,y_1\,d_1$$

em que o momento de inércia de uma vara em relação ao centro de massa é ($I_c = mL^2/12$), Tendo em conta a relação entre as variáveis para pequenas oscilações:

$$\begin{cases} y_1 = y - d_1\theta \\ y_2 = y + d_2\theta \end{cases}$$

e substituindo nas equações, obtém-se:

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -K_1\,(y - d_1\,\theta) - K_2\,(y + d_2\,\theta)$$

$$I_c\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K_2\,d_2\,(y + d_2\,\theta) + K_1\,d_1\,(y + d_1\,\theta)$$

ou seja

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K_1+K_2}{m}\,y - \frac{K_2\,d_2-K_1\,d_1}{m}\,\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K_2\,d_2-K_1\,d_1}{I_c}\,y - \frac{K_1\,d_1^2+K_2\,d_2^2}{I_c}\,\theta$$

e, definindo as constantes:

$$\omega_y^2 = \frac{K_1+K_2}{m}$$

$$\omega_\theta^2 = \frac{K_1\,d_1^2+K_2\,d_2^2}{I_c}$$

$$\beta = K_2\,d_2 - K_1\,d_1$$

obtém-se finalmente para as equações diferenciais do movimento:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_y^2\,y - \frac{\beta}{m}\,\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_\theta^2\,\theta - \frac{\beta}{I_c}\,y$$

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

2. Sistema de quatro molas e três massas sujeito a uma força exterior

Uma vez que as forças das molas são proporcional à deformação das mesma ter-se-a que cada uma dela será da forma $F = k\Delta x$. Vão aqui usar-se como coordenadas os devios das massas em relação à sua posição de equíbrio. Para além disso, sobre a massa '**1**' irá actuar uma força periódica do tipo $F_o\, cos(w\, t)$. Assim, tem-se a partir das equações de Newton:

$$m\, \frac{d^2x_1}{dt^2} = -K\, x_1 + K\,(x_2 - x_1) + F_o\, cos(w\, t)$$
$$m\, \frac{d^2x_2}{dt^2} = -K\,(x_2 - x_1) + K\,(x_3 - x_2)$$
$$m\, \frac{d^2x_3}{dt^2} = -K\,(x_3 - x_2) - K\, x_3$$

simplificando, dividindo pela massa m e designando por $\omega_o^2 = K/m$, tem-se:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2\,\omega_o^2\, x_1 + \omega_o^2\, x_2 + \frac{F_o}{m}\, cos(w\, t)$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \omega_o^2\, x_1 - 2\,\omega_o^2\, x_2 + \omega_o^2\, x_3$$
$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = \omega_o^2\, x_2 - 2\,\omega_o^2\, x_3$$

3. Difracção por duas fendas

A expressão da intensidade da onda resultante é dada pela expressão:

$$I = I_o\, \frac{sin^2(\beta)}{\beta^2}\, cos^2(\gamma)$$

em que I_o, é a intensidade da onda para $\theta = 0$, o segundo termo do produto corresponde à difracção e o terceiro termo diz respeito à interferência. Tem-se, então para 'β' e 'γ'

$$\beta = \frac{\pi\, b\, sin(\theta)}{\lambda}$$
$$\gamma = \frac{\pi\, d\, sin(\theta)}{\lambda}$$

em que 'b' é a largura das fendas, 'd' a distância entre elas, 'λ' é o comprimento de onda da radiação incidente e

$$tg(\theta) = \frac{x}{D}$$

com 'D' a distâncias das fendas ao alvo e 'x' distância no alvo (ver figura).

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

4. Baloiço

Partindo das expressões das posições das massas, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = L_1\, sin(\varphi) \\ y_1 = L_1\, cos(\varphi) \end{cases} \begin{cases} x_2 = L_1\, sin(\varphi) + L_2\, sin(\varphi+\theta) \\ y_2 = L_1\, cos(\varphi) + L_2\, cos(\varphi+\theta) \end{cases} \begin{cases} x_3 = L_1\, sin(\varphi) - L_3\, sin(\varphi+\theta) \\ y_3 = L_1\, cos(\varphi) - L_3\, cos(\varphi+\theta) \end{cases}$$

derivando obtêm-se a velocidades que podem ser substituídas na expressão da energia cinética (T):

$$T = \tfrac{1}{2}\, m_1\, v_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, v_2^2 + \tfrac{1}{2}\, m_3\, v_3^2$$

obtém-se a expressão:

$$T = \tfrac{1}{2}\, I_1\, \dot\varphi^2 + \tfrac{1}{2}\, I_2\, (\dot\varphi + \dot\theta)^2 - L_1\, N\, cos(\theta)\, (\dot\varphi + \dot\theta)\, \dot\varphi$$

com

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$
$$I_1 = M\, L_1^2$$
$$I_2 = m_2\, L_2^2 + m_3\, L_3^2$$
$$N = m_3\, L_3 - m_2\, L_2$$

Para a energia potencial (V), tem-se

$$V = -m_1\, g\, y_1 - m_2\, g\, y_2 - m_3\, g\, y_3$$
$$V = -M\, g\, L_1\, cos(\varphi) + N\, g\, cos(\varphi+\theta)$$

Utilizando as equações de Lagrange, obtém:

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \tfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{com} \qquad L = T - V$$

Tem-se então para a função Lagrangeana:

$$L = \tfrac{1}{2}\, I_1\, \dot\varphi^2 + \tfrac{1}{2}\, I_2\, (\dot\varphi + \dot\theta)^2 - L_1\, N\, cos(\theta)\, (\dot\varphi + \dot\theta)\, \dot\varphi + M\, g\, L_1\, cos(\varphi) - N\, g\, cos(\varphi+\theta)$$

Calculando as derivadas, obtém a equação:

$$\begin{aligned} \ddot\varphi\, (I_1 + I_2 - 2\, L_1\, N\, cos(\theta)) + \ddot\theta\, (I_2 - L_1\, N\, cos(\theta)) + \text{Ł}_1\, N\, sin(\theta)\, (2\, \dot\varphi + \dot\theta)\, \dot\theta \\ + M\, g\, L_1\, sin(\varphi) - N\, g\, sin(\varphi+\theta) = 0 \end{aligned}$$

de onde se tira a expressão da segunda derivada de 'φ', substituindo a expressão de 'θ':

$$\theta = \theta_o\, cos(\omega t)$$
$$\dot\theta = -\theta_o\, \omega\, sin(\omega t)$$
$$\ddot\theta = -\theta_o\, \omega^2\, cos(\omega t) = -\omega^2\, \theta$$