MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2017/2018

Trabalhos Finais (04/12/2017)

Para a realização dos trabalhos tenha em conta os seguintes pontos:

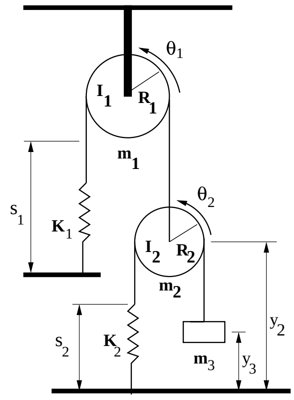
- Os trabalhos finais são realizados em grupo e serão sujeitos a uma discussão final. Cada grupo deve escolher um único trabalho.
- Todos os trabalhos realizados devem ser escritos em **C** em ambiente de janelas;
- Para construir a(s) janela(s) a utilizar no programa deve ser usada a biblioteca GTK+ descrita durante esta cadeira;
- Os parâmetros, bem como as ordens de execução, para a realização dos objectivos do trabalho devem poder ser dados, em tempo real, a partir das janelas de execução do programa;
- As escalas dos eixos, sempre que tal se justifique, devem poder ser alteradas a partir da janela.
- Deverão existir, sempre que tal se justifique, botões que permitam parar, continuar e recomeçar as representações gráficas.
- Concluído um gráfico, o utilizador deve ter possibilidade de optar por sobrepor um novo gráfico (quando isso tiver cabimento) ao já existente ou fazer um novo desde o início. Deverá ainda ser possível dar a ordem de limpar um gráfico já existente.
- Ao iniciar-se o programa, devem estar introduzidos os valores que permitam executar uma demonstração.
- Os cálculos efectuados para as representações gráficas deverão resultar da resolução numérica da(s) equação(ões) diferencial(is) e não a partir de soluções gerais conhecidas.
- No que respeita às dimensões do sistema, estas deverão ser implicitamente definidas internamente pelo programa de modo a ele se ajustar correctamente às dimensões do ecrã.
- Os trabalhos realizados deverão ainda ser acompanhados por um pequeno texto explicativo (cerca de duas páginas) escrito em TeX ou em LaTeX.

MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2017/2018

Trabalhos Finais (04/12/2017)

1. Sistema de duas molas, duas roldanas e uma massa



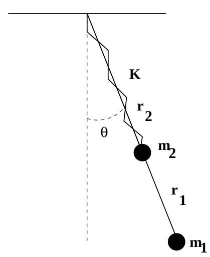
Considere o sistema ao lado constituído por duas molas, duas roldanas e uma massa representado ao lado. A roldana **1** está fixa e tem de massa $\mathbf{m}_1$ e raio $\mathbf{R}_1$, a roldana **2** é móvel e tem massa $\mathbf{m}_2$, e raio $\mathbf{R}_2$, a massa **3** tem de massa $\mathbf{m}_3$ e as duas molas têm constantes elásticas respectivamente $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$. Considere as roldadas aproximamente como discos cilíndricos uniformes com momento de inércia $I = m\,R^2/2$ e ainda que as massas das molas e do fio podem ser desprezáveis face às restantes massas. Despreze igualmente os efeitos resultantes do atrito nas diferentes componentes do sistema e considere que o fio não desliza nas roldanas.

O utilizador deverá ter à sua disposição a possibilidade de alterar as massas dos objectos, o raio das roldanas e as constantes das molas. Alternativamente, poderá pedir os momentos de inércia em vez das massas das roldanas.

O programa deverá ainda poder apresentar os gráficos dos movimentos dos três objecto em questão.

2. Simulação do movimento dum sistema de uma mola e duas massas ligadas num haste

Pretende-se com este trabalho mostrar o movimento de duas massas m_1 e m_2 ligadas a uma haste em que a massa m_1 está fixa a uma distância r_1 e m_2 se move sem atrito, sobre a haste que liga a m_2 e está presa por uma mola (ver figura ao lado). Despreze as massas da mola e da haste.



As massas (m_1 e m_2), a constante da mola (K), o comprimento natural (ℓ), a posição da massa m_2 (r_2), bem como as condições iniciais do problema (r_o, $\dot{r}_o$, ...) devem poder ser atribuídas e alteradas durante a execução do programa.

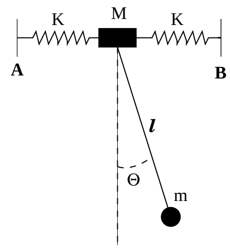
Quando o programa começa devem estar desde logo atribuídos valores para que se possa visualizar um exemplo demonstrativo do movimento.

Deverá ser possível visualizar, opcionalmente, em tempo real, gráficos que mostre o valor do ângulo que a haste faz com a vertical em função do tempo, a distância da massa m_2 ao ponto de fixação da haste, bem como as respectivas velocidades em função do tempo e ainda a posição da massa m_2 em função do ângulo.

3. Simulação do movimento dum sistema de duas molas e um pêndulo

Pretende-se com este trabalho mostrar o movimento dum sistema constituído por duas massas, duas molas e um pêndulo como se mostra na figura. A constante das molas é K, a massa, M, apenas pode deslocar-se na horizontal e a massa, m, encontra-se suspensa por uma haste de comprimento ℓ. O movimento dá-se no plano vertical, logo, sujeito à acção da gravidade. Despreze a massa da haste e os efeitos do atrito.

As massas, M e m, a constante das molas, K, e o comprimento da haste, ℓ, bem como as condições iniciais do movimento devem poder ser atribuídas e alteradas durante a execução do programa.



Quando o programa começa devem estar atribuídos valores para que se possa visualizar um exemplo demonstrativo do movimento.

Deverá ser possível visualizar, opcionalmente, em tempo real, gráficos que mostrem as variáveis em função do tempo ou a posição de uma das massas em função do ângulo que o pêndulo faz com a vertical.

4. Jogo da vida

O jogo da vida foi desenvolvido por John Conway (1970) e consiste num autómato celular constituído por uma rede de células com apenas dois estados possíveis (vivo ou morto) com as seguintes regras da evolução para cada célula:

1. Qualquer célula viva com menos de dois vizinhos vivos morre;
2. Qualquer célula viva com mais de três vizinhos morre;
3. Qualquer célula morta com exactamente três vizinhos torna-se viva;
4. Qualquer célula viva com dois ou três vizinhos continua viva.

O cálculo do estado seguinte da rede deve ser feito apenas à custa dos valores do estado anterior da rede.

Para a implementação deste autómato, construa uma rede rectangular NxM (a serem fornecidos pelo utilizador a cada nova simulação). Como condições iniciais do sistema, o utilizador deverá poder optar por uma distribuição aleatória de estados com uma dada probabilidade de ocupação 'p' ou por algumas configurações de comportamento especial (ver informação na net).

O programa deverá dispor de botões que permitam fazer uma pausa e continuar, ou parar e recomeçar uma nova simulação. O utilizador deverá podem escolher, para a aplicação das regras do autómato na fronteira do rectângulo, entre condições fronteiras periódicas ou por um rectângulo fechado.

Deverá ser possível ao utilizador visualizar, em tempo real, um gráfico que mostre o número de células vivas, ou mortas, ou que nasceram ou que morreram em função do tempo da evolução (iteração).

Durante a simulação deverão estar indicados o número de células vivas, o número de células que morreram e o número de células que nasceram bem como o número da iteração.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

1. Sistema de duas molas, duas roldanas e uma massa

Para a obtenção das equações diferenciais do movimento o modo mais simples é recorrer às equações de Lagrange. Assim, tem-se para a energia cinética e para a energia potencial:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\, I_1\, \omega_1^2 + \tfrac{1}{2}\, I_2\, \omega_2^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, v_2^2 + \tfrac{1}{2}\, m_3\, v_3^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\, \tfrac{I_1}{R_1^2}\, \dot{y}_2^2 + \tfrac{1}{2}\, \tfrac{I_2}{R_2^2}\, (\dot{y}_3 - \dot{y}_2)^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, \dot{y}_2^2 + \tfrac{1}{2}\, m_3\, \dot{y}_3^2 \end{aligned}$$

$$V = \tfrac{1}{2}\, K_1\, (s_1 - \ell_1)^2 + \tfrac{1}{2}\, K_2\, (s_2 - \ell_2)^2 + m_2\, g\, y_2 + m_3\, g\, y_3$$

em que ℓ_1 e ℓ_2 são os comprimentos naturais das molas e ainda que as relações entre as coordenada e C_1 e C_2 duas constantes:

$$s_1 + y_2 = C_1$$

$$(y_2 - s_2) + (y_2 - y_3) = C_2$$

Eliminando s_1 e s_2, obtem-se

$$T = \tfrac{1}{2}\, (\tfrac{I_2}{R_2^2} + m_3)\, \dot{y}_3^2 + \tfrac{1}{2}\, (\tfrac{I_1}{R_1^2} + \tfrac{I_2}{R_2^2} + m_2)\, \dot{y}_2^2 - \tfrac{I_2}{R_2^2}\, \dot{y}_2\, \dot{y}_3$$

$$V = \tfrac{1}{2}\, K_1\, (C_1 - y_2 - \ell_1)^2 + \tfrac{1}{2}\, K_2\, (2\, y_2 - y_3 - C_2 - \ell_2)^2 + m_2\, g\, y_2 + m_3\, g\, y_3$$

e, assim, o Lagrangeano do sistema ($L = T - V$) será então:

$$\begin{aligned} L = {} & \tfrac{1}{2}\, (\tfrac{I_2}{R_2^2} + m_3)\, \dot{y}_3^2 + \tfrac{1}{2}\, (\tfrac{I_1}{R_1^2} + \tfrac{I_2}{R_2^2} + m_2)\, \dot{y}_2^2 - \tfrac{I_2}{R_2^2}\, \dot{y}_2\, \dot{y}_3 \\ & -\tfrac{1}{2}\, K_1\, (C_1 - y_2 - \ell_1)^2 - \tfrac{1}{2}\, K_2\, (2\, y_2 - y_3 - C_2 - \ell_2)^2 - m_2\, g\, y_2 - m_3\, g\, y_3 \end{aligned}$$

A equações do movimento obtêm-se aplicando-lhe as equações de Lagrange:

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} - \tfrac{\partial L}{\partial y_2} = 0$$

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} - \tfrac{\partial L}{\partial y_3} = 0$$

substituindo, obtêm-se as equações do movimento:

$$\tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = A\, \dot{y}_2 - B\, \dot{y}_3 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = A\, \ddot{y}_2 - B\, \ddot{y}_3$$

$$\tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = F\, \dot{y}_3 - B\, \dot{y}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = F\, \ddot{y}_3 - B\, \ddot{y}_2$$

$$\tfrac{\partial L}{\partial y_2} = k_1\, (C_1 - y_2 - \ell_1) - 2\, K_2 (2\, y_2 - y_3 - C_2 - \ell_2) - m_2\, g = C y_2 + D y_3 + E$$

$$\tfrac{\partial L}{\partial y_3} = k_2\, (2\, y_2 - y_3 - C_2 - \ell_2) - m_3\, g = D\, y2 - (D/2)\, y3 + G$$

em que:

$$A = \tfrac{I_1}{R_1^2} + \tfrac{I_2}{R_2^2} + m_2 \qquad B = \tfrac{I_2}{R_2^2}$$

$$C = -(k_1 + 4\, k_2) \qquad D = 2\, k_2$$

$$E = k_1\, (C_1 - \ell_1) + 2\, k_2\, (C_2 + \ell_2) - m_2\, g \qquad F = \tfrac{I_2}{R_2^2} + m_3$$

$$G = -m_3\, g - k_2\, (C_2 + \ell_2)$$

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

1. Sistema de duas molas, duas roldanas e uma massa (continuação)

Substituindo nas equações de Lagrange obtem-se:

$$A\,\ddot{y}_2 - B\,\ddot{y}_3 = C\,y_2 + D\,y_3 + E$$

$$-B\,\ddot{y}_2 + F\,\ddot{y}_3 = D\,y_2 - (D/2)\,y_3 + G$$

e, resolvendo o sistema em ordem a $\ddot{y}_2$ e a $\ddot{y}_3$, tem-se:

$$(A*F - B^2)\,\ddot{y}_2 = (C*F + B*D)\,y_2 + (D*F - B*D/2)\,y_3 + (E*F + B*G)$$

$$(A*F - B^2)\,\ddot{y}_3 = (A*D + B*C)\,y_2 + (B*D - A*D/2)\,y_3 + (E*B + A*G)$$

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

2. Simulação do movimento dum sistema de uma mola e duas massas ligadas num haste

Usando coordenadas polares, tem-se para as velocidades das massas m_1 m_2:

$$\vec{v}_1 = r_1\,\dot{\theta}\,e_\theta \qquad \Longrightarrow \qquad (\vec{v}_1)^2 = r_1^2\,\dot{\theta}^2$$

$$\vec{v}_2 = \dot{r}_2\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,e_\theta \qquad \Longrightarrow \qquad (\vec{v}_2)^2 = \dot{r}_2^2 + r^2\,\dot{\theta}^2$$

A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2}\,m_1\,v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\,r_1^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{r}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\,r_2^2\,\dot{\theta}^2$$

e a energia potencial:

$$V = \frac{1}{2}\,K\,(\ell - r_2)^2 - m_1\,g\,r_1\,cos(\theta) - m_2\,g\,r_2\,cos(\theta)$$

e o Lagrangeano do sistema (L = T - V) é:

$$L = \frac{1}{2}m_1\,r_1^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{r}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\,r_2^2\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\,K\,(\ell - r_2)^2 + m_1\,g\,r_1\,cos(\theta) + m_2\,g\,r_2\,cos(\theta)$$

A partir das equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} - \frac{\partial L}{\partial r_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Calculando das respectivas derivadas, tem-se para 'r_2':

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} = m\,\dot{r}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} = m\,\ddot{r}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_2} = +K\,(\ell - r_2) + m_2\,g\,cos(\theta) + m_2\,r_2\,\dot{\theta}^2$$

substituindo na equação de Lagrange

$$m_2\,\ddot{r}_2 + K(r_2 - \ell) - m_2\,g\,cos(\theta) - m_2\,r_2\,\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\ddot{r}_2 = -\frac{K}{m_2}(r_2 - \ell) + g\,cos(\theta) + r_2\,\dot{\theta}^2$$

e para 'θ':

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1\,r_1^2\,\dot{\theta} + m_2\,r_2^2\,\dot{\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1\,r_1^2\,\ddot{\theta} + m_2\,r_2^2\,\ddot{\theta} + m_2\,r_2\,\dot{r}_2\,\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\,(m_1\,r_1 + m_2\,r_2)\,g\,sin(\theta)$$

substituindo na equação de Lagrange

$$m_1\,r_1^2\,\ddot{\theta} + m_2\,r_2^2\,\ddot{\theta} + m_2\,r_2\,\dot{r}_2\,\dot{\theta} + (m_1\,r_1 + m_2\,r_2)\,g\,sin(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{m_2\,r_2}{m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2}\,\dot{r}_2\,\dot{\theta} - \frac{m_1\,r_1 + m_2\,r_2}{m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2}\,g\,sin(\theta)$$

Assim, as equações do movimento são:

$$\ddot{r}_2 = -\frac{K}{m_2}(r_2 - \ell) + g\,cos(\theta) + r_2\,\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{m_2\,r_2}{m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2}\,\dot{r}_2\,\dot{\theta} - \frac{m_1\,r_1 + m_2\,r_2}{m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2}\,g\,sin(\theta)$$

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

3. Simulação do movimento dum sistema de duas molas e um pêndulo

Consire-se um referencial com origem no ponto A com o eixo dos xx's na horizontal e o eixo dos yy's na vertical com o sentido positivo para cima e 'a' a posição da massa M quando o sistema está em equilíbrio.

As posições das massas M e m, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_1$, respectivamente, são:

$$\vec{r}_1 = (a + x)\,\vec{e}_x$$

$$\vec{r}_2 = (a + x + \ell\, sin(\theta)\,\vec{e}_x - \ell\, cos(\theta)\,\vec{e}_y$$

derivando em ordem ao tempo, tem-se para as velocidades das massas:

$$\vec{v}_1 = \dot{x}\,\vec{e}_x$$

$$\vec{v}_2 = (\dot{x} + \ell\, cos(\theta)\,\dot{\theta})\,\vec{e}_x + \ell\, sin(\theta)\,\dot{\theta})\,\vec{e}_y$$

e, elevando ao quadrado

$$\vec{v}_1^2 = \dot{x}^2$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_2^2 &= \dot{x}^2 + \ell^2\, cos^2(\theta)\,\dot{\theta}^2 + 2\,\ell\, cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta} + \ell^2 \sin^2(\theta)\,\dot{\theta}^2 \\ &= \dot{x}^2 + \ell^2\,\dot{\theta}^2 + 2\,\ell\, cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\end{aligned}$$

Assim, tem-se respectivamente para a energia cinética e para a energia potencial (tomando para '0' a origem do referencial):

$$T = \tfrac{1}{2}M\,\vec{v}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\,\vec{v}_2^2 = \tfrac{1}{2}M\,\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 + m\,\ell\, cos(\theta)\,\dot{x}\,\dot{\theta}$$

$$T = \tfrac{1}{2}(M + m)\,\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 + m\,\ell\, cos(\theta)\,\dot{x}\,\dot{\theta}$$

$$V = -m\,g\,\ell\, cos\theta + \tfrac{1}{2}k\,x^2$$

Em que $(k = 2K)$. Assim, o Lagrangeano do sistema $(L = T - V)$ é então:

$$L = \tfrac{1}{2}(M + m)\,\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 + m\,\ell\, cos(\theta)\,\dot{x}\,\dot{\theta} + m\,g\,\ell\, cos\theta - \tfrac{1}{2}k\,x^2$$

As equações de Lagrange do sistema são:

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \tfrac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \tfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Substituindo o Lagrangeano na equações obtêm-se as equações do movimento:

$$(M + m)\,\ddot{x} + m\,\ell\, cos(\theta)\,\ddot{\theta} - m\,\ell\, sin(\theta)\,\dot{\theta}^2 + k\,x = 0$$

$$cos(\theta)\,\ddot{x} + \ell\,\ddot{\theta} + g\, sin(\theta) = 0$$

e, resolvendo o sistema, tem-se:

$$(1 + \tfrac{m}{M}\, sin^2(\theta))\,\ddot{x} = \tfrac{m}{M}\, sin(\theta)\, cos(\theta)\, g + \tfrac{m}{M}\,\ell \sin(\theta)\,\dot{\theta}^2 - \tfrac{k}{M}\,x$$

$$\ell\,(1 + \tfrac{m}{M}\, sin^2(\theta))\,\ddot{\theta} = -\tfrac{m}{M}\,\ell\, sin(\theta)\, cos(\theta)\,\dot{\theta}^2 - (1 + \tfrac{m}{M})\, g\, sin(\theta) + \tfrac{k}{M}\, cos(\theta)\, x$$