

MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2016/2017

Trabalhos Finais (07/12/2016)

Para a realização dos trabalhos tenha em conta os seguintes pontos:

- Os trabalhos finais são realizados em grupo e serão sujeitos a uma discussão final. Cada grupo deve escolher um único trabalho.
- Todos os trabalhos realizados devem ser escritos em **C** em ambiente de janelas;
- Para construir a(s) janela(s) a utilizar no programa deve ser usada uma das bibliotecas descritas durante esta cadeira (GTK+ ou Allegro);
- Os parâmetros, bem como as ordens de execução, para a realização dos objectivos do trabalho devem poder ser dados, em tempo real, a partir das janelas de execução do programa;
- As escalas dos eixos, sempre que tal se justifique, devem poder ser alteradas a partir da janela.
- Deverão existir, sempre que tal se justifique, botões que permitam parar, continuar e recomeçar as representações gráficas.
- Concluído um gráfico, o utilizador deve ter possibilidade de optar por sobrepor um novo gráfico (quando isso tiver cabimento) ao já existente ou fazer um novo desde o início. Deverá ainda ser possível dar a ordem de limpar um gráfico já existente.
- Ao iniciar-se o programa, devem estar introduzidos os valores que permitam executar uma demonstração.
- Os cálculos efectuados para as representações gráficas deverão resultar da resolução numérica da(s) equação(ões) diferencial(is) e não a partir de soluções gerais conhecidas.
- No que respeita às dimensões do sistema, estas deverão ser implicitamente definidas internamente pelo programa de modo a ele se ajustar correctamente às dimensões do ecrã.
- Os trabalhos realizados deverão ainda ser acompanhados por um pequeno texto explicativo (uma ou duas páginas) escrito em TeX ou em LaTeX.

MEFT - Programação

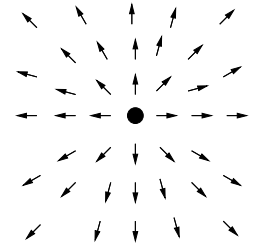
1º Ano - 1º Semestre de 2016/2017

Trabalhos Finais (07/12/2016)

1. Campo eléctrico produzido por N cargas

Pretende-se criar um programa que mostre no ecrã N cargas eléctricas bem como pequenos vectores, sobre uma quadrícula, que representem o campo eléctrico criado por aquelas cargas no espaço envolvente.

Na figura ao lado apresenta-se um exemplo em que se representam a direcção e o sentido do campo eléctrico gerado por uma carga eléctrica positiva.



O programa deverá permitir alterar, em tempo real, o número de cargas (criar ou apagar), as suas posições e os seus valores. A situação sem cargas eléctricas deve ser permitida pelo programa.

Deverá ainda existir uma opção em que se escolhe o número de cargas e o programa gera aleatoriamente os seus valores e posições.

O programa deverá ter uma opção em que o campo eléctrico é representado com a sua direcção, sentido e valor e outra em que é apresentado com um valor fixo, mostrando assim apenas a direcção e o sentido.

Nota: O campo eléctrico deverá ser sempre apresentado e actualizado à medida que se acrescentam (ou diminuem) cargas, bem como durante o seu deslocamento ou alteração de valor.

2. Pêndulo com mola sujeito à força da gravidade

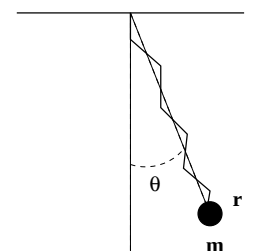
Pretende-se com este trabalho mostrar o movimento de uma massa m suspensa por uma mola sob a acção do campo da gravidade (ver figura ao lado). Despreze a massa da mola.

A massa (m), a constante da mola (K), o comprimento (ℓ) bem como as condições iniciais do problema (r_o , $\dot{r}_o$, θ e $\dot{\theta}_o$) devem poder ser atribuídas e alteradas durante a execução do programa.

Quando o programa começa devem estar desde logo atribuídos valores para que se possa visualizar um exemplo demonstrativo do movimento.

Deverá ser possível visualizar, em tempo real, um gráfico que mostre o valor de ' r ' ou de ' θ ' em função do tempo ou a relação entre ' r ' e ' θ '.

O programa deve ainda disponibilizar uma opção que permita ao utilizador visualizar a trajectória da massa ' m ' durante algum tempo.



MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2016/2017

Trabalhos Finais (07/12/2016)

3. Oscilador forçado sujeito à gravidade e que bate numa plataforma

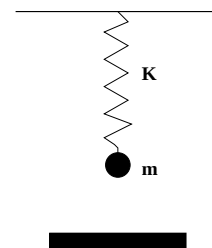
Pretende-se com este trabalho mostrar o movimento de uma massa ' m ' presa por uma mola de constante ' K ' que se encontra sujeita à acção da gravidade, que é actuada por uma força exterior periódica e que bate numa plataforma fixa (ver figura ao lado). Despreze a massa da mola e admita como elástico o choque da massa ' m ' com a plataforma que pode ser considerada como tendo uma massa infinita em comparação com ' m '. Admita ainda que se pode considerar como instantâneo o choque entre a massa ' m ' e a plataforma.

A massa (m), a constante da mola (K), o seu comprimento natural (ℓ), o coeficiente de amortecimento (λ), a amplitude da força exterior (F_o), a frequência exterior (ω_f), bem como as condições iniciais do problema (x_o , v_o) devem poder ser atribuídas e alteradas durante a execução do programa.

Quando o programa começa devem estar desde logo atribuídos valores para que se possa visualizar um exemplo demonstrativo do movimento.

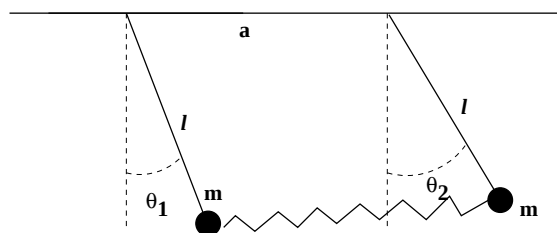
Deverá ser possível visualizar, em tempo real, um gráfico que mostre o valor de ' r ' ou de ' v ' em função do tempo ou ainda a relação entre ' r ' e ' v '.

Deverá permitir situações em que a força exterior e/ou força de atrito seja nulas.



4. Dois pêndulos ligados por uma mola

Pretende-se com este trabalho mostrar o movimento de um sistema constituído por dois pêndulos de comprimento ' ℓ ' e massas ' m ' ligados por uma mola de constante ' K ' de comprimento natural igual à distância entre os pontos de suspensão dos pêndulos (ver figura abaixo). Despreze as massas dos pêndulos e da mola.



A massa dos pêndulos (m), os seus comprimentos (ℓ), a constante da mola (K) e a distância entre os pontos de suspensão dos pêndulos (a), bem como as condições iniciais do problema (posições e velocidades iniciais das massas) devem poder ser atribuídos e alterados durante a execução do programa.

Quando o programa começa devem estar desde logo atribuídos valores para que se possa visualizar um exemplo demonstrativo do movimento.

Deverá poder-se visualizar simultaneamente os gráficos dos ângulos formados pelas duas massas com a respectiva posição de equilíbrio. Deverá ainda existir uma opção que permita, em vez dos ângulos, visualizar as respectivas velocidades angulares.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

2. Pêndulo com mola sujeito à força da gravidade

Para a obtenção das equações diferenciais do movimento o modo mais simples é recorrer às equações de Lagrange. Assim, tem-se para a energia cinética e para a energia potencial, em coordenadas polares:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = -m g r \cos(\theta) + \frac{1}{2} K (\ell - r)^2$$

em que o "0" do potencial gravítico se colocou no ponto de suspensão.

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m g r \cos(\theta) - \frac{1}{2} K (\ell - r)^2$$

A partir das equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Calculando das respectivas derivadas, tem-se para 'r':

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad \implies \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = +K (\ell - r) + m g \cos(\theta) + m r \dot{\theta}^2$$

substituindo na equação de Lagrange

$$m \ddot{r} + K(r - \ell) - m g \cos(\theta) - m r \dot{\theta}^2 = 0$$

$$\ddot{r} + \frac{K}{m}(r - \ell) - g \cos(\theta) - r \dot{\theta}^2 = 0$$

e para 'θ':

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad \implies \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g r \sin(\theta)$$

substituindo na equação de Lagrange

$$2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} + m g r \sin(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2 \dot{r} \dot{\theta}}{r} + \frac{g}{r} \sin(\theta) = 0$$

Assim, as equações do movimento são:

$$\ddot{r} = -\frac{K}{m}(r - \ell) + g \cos(\theta) + r \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2 \dot{r} \dot{\theta}}{r} - \frac{g}{r} \sin(\theta)$$

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

3. Oscilador forçado sujeito à gravidade e que bate numa plataforma

Num oscilador forçado com atrito sujeito à acção da gravidade, a massa ' m ' está sujeita às seguintes forças (força da mola (F_m), força de atrito (F_a), força da gravidade (F_g) e força exterior periódica (F_e)):

$$F = F_m + F_a + F_g + F_e = -K(x - \ell) - mg - \beta v - F_o \cos(\omega_f t)$$

Assim, vem para a equação do movimento:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -K(x - \ell) - \beta \frac{dx}{dt} - mg - F_o \cos(\omega_f t)$$

Dividindo pela massa,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}(x - \ell) - \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} - g - \frac{F_o}{m} \cos(\omega_f t)$$

e designando por:

$$\omega_o^2 = \frac{K}{m} \quad \lambda = \frac{\beta}{2m} \quad a_o = \frac{F_o}{m}$$

tem-se:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_o^2(x - \ell) - 2\lambda \frac{dx}{dt} - g - a_o \cos(\omega_f t)$$

Para a colisão entra a massa ' m ' e a plataforma, uma vez que diz para considerar a massa da plataforma muito grande (∞), a velocidade da massa ' m ' após o choque com a plataforma é igual a menos a velocidade antes do choque (ver Apêndice – Colisão frontal de duas massas).

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

4. Dois pêndulos ligados por uma mola

Este sistema tem dois graus de liberdade. Vão aqui usar-se como coordenadas os ângulos que os pêndulos fazem com a posição de equilíbrio (θ_1 e θ_2). Começamos por escrever as suas posições e velocidades em coordenadas cartesianas em que se toma para origem o ponto em que pêndulo 1 fixo:

$$\begin{cases} x_1 = \ell \sin(\theta_1) \\ y_1 = \ell (1 - \cos(\theta_1)) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = a + \ell \sin(\theta_2) \\ y_2 = \ell (1 - \cos(\theta_2)) \end{cases}$$
$$\begin{cases} v_{x_1} = \ell \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ v_{y_1} = \ell \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_{x_2} = \ell \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ v_{y_2} = \ell \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

Tem-se para a energia cinética e para a energia potencial:

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}_2^2$$
$$V = m g \ell (1 - \cos(\theta_1)) + m g \ell (1 - \cos(\theta_2)) + \frac{1}{2} K ((x_2 - x_1) - a)^2$$
$$V = m g \ell (2 - \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + \frac{1}{2} K \ell^2 (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))^2$$

Assim, o Lagrangeano do sistema é:

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - m g \ell (2 - \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) - \frac{1}{2} K \ell^2 (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))^2$$

A partir das equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

calculando das respectivas derivadas, tem-se para θ_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m \ell^2 \dot{\theta}_1 \quad \implies \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m \ell^2 \ddot{\theta}_1$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m \ell g \sin(\theta_1) + K \ell^2 (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1)$$

substituindo na equação de Lagrange

$$m \ell^2 \ddot{\theta}_1 = -m \ell g \sin(\theta_1) + K \ell^2 (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1)$$
$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta_1) + \frac{K}{m} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1)$$

e para θ_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m \ell^2 \dot{\theta}_2 \quad \implies \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m \ell^2 \ddot{\theta}_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m \ell g \sin(\theta_2) - K \ell^2 (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2)$$

substituindo na equação de Lagrange

$$m \ell^2 \ddot{\theta}_2 = -m \ell g \sin(\theta_2) - K \ell^2 (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2)$$
$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta_2) - \frac{K}{m} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2)$$

Assim, as equações do movimento são:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta_1) + \frac{K}{m} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1)$$
$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta_2) - \frac{K}{m} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2)$$

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

Apêndice

Colisão frontal de duas massas

Seja a colisão frontal de uma massa ' m_1 ' com velocidade ' v_1 ' com uma massa ' m_2 ' em repouso ($v_2 = 0$). Designando por ' u_1 ' e ' u_2 ' as velocidades depois do choque, tem-se, para as equações de conservação do momento linear e da energia cinética:

$$\begin{cases} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{cases}$$

Dividindo por m_1 e fazendo $\rho = m_2/m_1$, tem-se

$$\begin{cases} v_1 &= u_1 + \rho u_2 \\ v_1^2 &= u_1^2 + \rho u_2^2 \end{cases}$$

Substituindo o u_1 obtido na segunda na primeira equação, tem-se:

$$v_1^2 = (v_1 - \rho u_2)^2 + \rho u_2^2 = v_1^2 + \rho^2 u_2^2 - 2\rho v_1 u_2 + \rho u_2^2$$

ou seja:

$$\rho u_2 (\rho u_2 - 2 v_1 + u_2) = 0$$

O que tem duas soluções. Para a primeira ($u_2 = 0$), tem-se:

$$\begin{cases} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= 0 \end{cases}$$

que corresponde à situação em não houve colisão.

Para a segunda ($\rho u_2 - 2 v_1 + u_2 = 0$), tem-se

$$\rho u_2 - 2 v_1 + u_2 = 0 \implies (1 - \rho) u_2 = 2 v_1 \implies u_2 = \frac{2}{1+\rho} v_1$$

$$v_1 = u_1 + \frac{2\rho}{1+\rho} v_1 \implies u_1 = \frac{1-\rho}{1+\rho} v_1$$

Assim, a solução em que há colisão é:

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1-\rho}{1+\rho} v_1 \\ u_2 &= \frac{2}{1+\rho} v_1 \end{cases}$$

Com base nesta solução podem estudar-se algumas situações especiais:

1. Duas massas iguais ($\rho = 1$):

$$\begin{cases} u_1 &= 0 \\ u_2 &= v_1 \end{cases}$$

2. ($m_2 \gg m_1 \implies \rho \rightarrow \infty$):

$$\begin{cases} u_1 &= -v_1 \\ u_2 &= 0 \end{cases}$$

3. ($m_2 \ll m_1 \implies \rho \rightarrow 0$):

$$\begin{cases} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= 2 v_1 \end{cases}$$