

MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2015/2016

Trabalhos Finais (07/12/2015)

Para a realização dos trabalhos tenha em conta os seguintes pontos:

- Os trabalhos finais são realizados em grupo e serão sujeitos a uma discussão final. Cada grupo deve escolher um único trabalho.
- Todos os trabalhos realizados devem ser escritos em **C** em ambiente de janelas;
- Para construir a(s) janela(s) a utilizar no programa deve ser usada uma das bibliotecas descritas durante esta cadeira (GTK+ ou Allegro);
- Os parâmetros, bem como as ordens de execução, para a realização dos objetivos do trabalho devem poder ser dados, em tempo real, a partir das janelas de execução do programa;
- As escalas dos eixos, sempre que tal se justifique, devem poder ser alteradas a partir da janela.
- Deverão existir, sempre que tal se justifique, botões que permitam parar, continuar e recomeçar as representações gráficas.
- Concluído um gráfico, o utilizador deve ter possibilidade de optar por sobrepor um novo gráfico (quando isso tiver cabimento) ao já existente ou fazer um novo desde o início. Deverá ainda ser possível dar a ordem de limpar um gráfico já existente.
- Ao iniciar-se o programa, devem estar introduzidos os valores que permitam executar uma demonstração.
- Os cálculos efectuados para as representações gráficas deverão resultar da resolução numérica da(s) equação(ões) diferencial(is) e não a partir de soluções gerais conhecidas.
- No que respeita às dimensões do sistema, estas deverão ser implicitamente definidas internamente pelo programa de modo a ele se ajustar correctamente às dimensões do ecrã.
- Os trabalhos realizados deverão ainda ser acompanhados por um pequeno texto explicativo (uma a duas páginas) escrito em TeX ou em LaTeX.

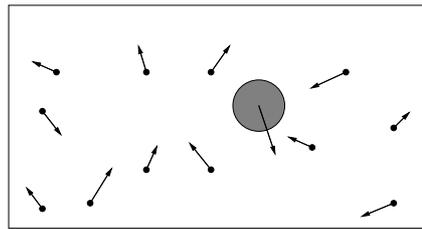
MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2015/2016

Trabalhos Finais (07/12/2015)

1. Simulação do movimento browniano a duas dimensões

Com vista à representação do movimento browniano a duas dimensões, faça numa caixa rectangular, uma simulação em que se mostra um círculo de raio ' r_1 ', velocidade inicial ' v_1 ' e massa ' m_1 ' e N pequenos círculos de ' r_2 ' com velocidade média inicial ' v_2 ' e massas ' m_2 '.



Considere apenas as colisões entre as bolas pequenas e a bola grande e admita ainda que os choques são elásticos quer entre as massas quer com as paredes.

O programa deverá permitir definir e alterar o número de bolas pequenas, a sua velocidade inicial e a sua massa, do mesmo modo deverá poder alterar para a bola grande e sua massa e velocidade.

As posições iniciais das massas m_2 devem ser determinadas aleatoriamente. Para obter as suas velocidades iniciais poderá um método à sua escolha.

O programa deverá ter ainda uma opção em que apenas fica visível a bola grande. Deverá poder visualizar-se, ou não, no ecrã a velocidade da bola grande.

Deverá ser ainda possível a qualquer momento parar o movimento e depois fazê-lo continuar, bem como alterar quaisquer dos valores e reiniciar o movimento.

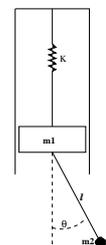
2. Massa com mola num cilindro e pêndulo

Pretende-se mostrar o movimento do sistema como se indica na figura ao lado.

Para tal, o programa deverá permitir escolher e alterar livremente as massas m_1 e m_2 , suas posições e velocidades iniciais.

Deverá ser ainda possível a qualquer momento parar o movimento e depois fazê-lo continuar, bem como alterar quaisquer dos valores e reiniciar o movimento.

O programa deverá ainda poder, caso o utilizador o peça, mostrar um gráfico da(s) coordenada(s) de m_1 ou m_2 em função do tempo.



MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2015/2016

Trabalhos Finais (07/12/2015)

3. Sistema de 3 molas e 1 massa

Considere o sistema ao lado constituído por três molas de constantes, K_1 , K_2 e K_3 fixas numa extremidade e ligadas pela outra a uma massa m que se move livremente num plano horizontal. Despreze a massa das molas.

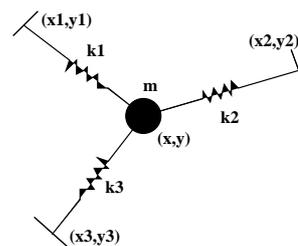
Pretende-se mostrar o movimento do sistema como se indica na figura ao lado.

Para tal, o programa deverá permitir escolher e alterar livremente as posições fixas das três molas, as suas constantes K_i e os seus comprimentos naturais.

Do mesmo modo, deverá ser possível fornecer e alterar, em tempo real, a massa, posição (x,y) , velocidade (v_x, v_y) iniciais de m .

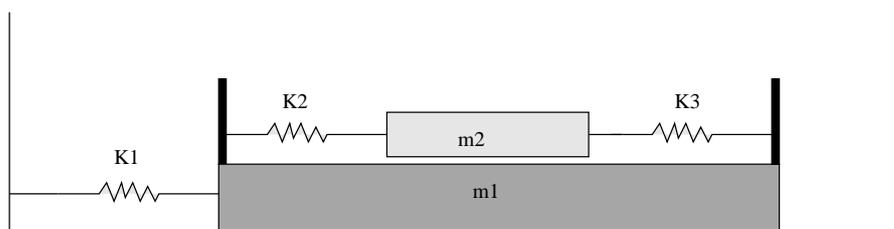
Deverá ser ainda possível a qualquer momento parar o movimento e depois fazê-lo continuar, bem como alterar quaisquer dos valores e reiniciar o movimento.

O programa deverá ainda poder, caso o utilizador o peça, mostrar um gráfico da(s) coordenada(s) da massa m em função do tempo.



4. Duas massa e três molas

Considere um sistema constituído por dois corpos e três molas como se representa na figura abaixo. Pretende-se mostrar movimento desse sistema.



Para tal, o programa deverá permitir escolher e alterar, em tempo real, os valores das suas massas, dos seus tamanhos, das suas posições e das suas velocidades iniciais. Igualmente devem-se poder escolher as constantes das molas. Admita ainda que, no estudo deste sistema, pode desprezar as massas das molas.

Deverá ser ainda possível a qualquer momento parar o movimento e depois fazê-lo continuar, bem como alterar quaisquer dos valores e reiniciar o movimento.

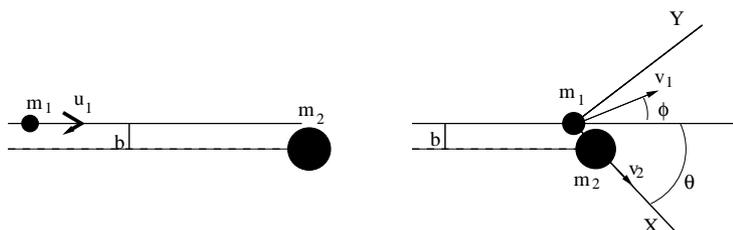
O programa deverá ainda poder, caso o utilizador o peça, mostrar um gráfico da(s) coordenada(s) de m_1 ou m_2 em função do tempo.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

1. Simulação do movimento browniano a duas dimensões

Estudo do choque no plano entre duas massa m_1 e m_2 de raios respectivamente R_1 e R_2 sem efeitos de rotação e com um parâmetro de impacto 'b'.

Seja então a figura



Antes do choque tem-se:

$$\begin{cases} b &= (R_1 + R_2) \sin \theta \\ \vec{u}_1 &= u_1 \cos \theta \vec{e}_x + u_1 \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{u}_2 &= 0 \end{cases}$$

depois do choque:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= v_1 \cos(\theta + \phi) \vec{e}_x + v_1 \sin(\theta + \phi) \vec{e}_y \\ \vec{v}_2 &= v_2 \vec{e}_x \end{cases}$$

e o coeficiente de restituição:

$$e = \frac{v_2 - v_1 \cos(\theta + \phi)}{v_1 \cos \theta}$$

De onde resulta, tendo em conta a conservação da quantidade de movimento e a expressão do coeficiente de restituição:

$$(1) \begin{cases} m_1 u_1 \cos \theta &= m_1 v_1 \cos(\theta + \phi) + m_2 v_2 \\ m_1 u_1 \sin \theta &= m_1 v_1 \sin(\theta + \phi) \\ e v_1 \cos \theta &= v_2 - v_1 \cos(\theta + \phi) \end{cases}$$

A solução deste sistema de equações é:

$$(2) \begin{cases} \tan(\theta + \phi) &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 - e m_2} \tan \theta \\ v_1 &= \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \phi)} u_1 \\ v_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + e) \cos \theta u_1 \end{cases}$$

em que θ é obtido a partir da expressão do parâmetro de impacto.

No caso da simulação pedida, o coeficiente de restituição é '1'.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

2. Massa com mola num cilindro e pêndulo

Considerando um sistema se eixos com o eixo dos yy' s para baixo e com origem no ponto em que está fixa a mola, tem-se para as energias cinética e potencial:

A energia cinética do sistema é:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 \\ \vec{v}_2 &= \dot{y} \vec{e}_y - \ell_2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{com} \quad \vec{e}_\theta = \cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{v}_2 &= \ell_2 \dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_x + (\dot{y} - \ell_2 \dot{\theta} \sin(\theta)) \vec{e}_y \\ \vec{v}_2^2 &= \dot{y}^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}^2 - 2 \ell_2 \sin(\theta) \dot{y} \dot{\theta}\end{aligned}$$

Ou seja, a energia cinética do sistema é dada por:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \ell_2^2 m_2 \dot{\theta}^2 - \ell_2 m_2 \sin(\theta) \dot{y} \dot{\theta}$$

E a energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} K (y - \ell_1)^2 - m_1 g y - m_2 g (y + \ell_2 \cos(\theta))$$

Assim, o lagrangeano do sistema é:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \ell_2^2 m_2 \dot{\theta}^2 - \ell_2 m_2 \sin(\theta) \dot{y} \dot{\theta} - \frac{1}{2} K (y - \ell_1)^2 + (m_1 + m_2) g y + m_2 g \ell_2 \cos(\theta)$$

A partir das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Cálculo das derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= (m_1 + m_2) \dot{y} - \ell_2 m_2 \sin(\theta) \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= (m_1 + m_2) \ddot{y} - \ell_2 m_2 \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - \ell_2 m_2 \sin(\theta) \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -K (y - \ell_1) + (m_1 + m_2) g \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \ell_2^2 m_2 \dot{\theta} - \ell_2 m_2 \sin(\theta) \dot{y} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \ell_2^2 m_2 \ddot{\theta} - \ell_2 m_2 \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{y} - \ell_2 m_2 \sin(\theta) \ddot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\ell_2 m_2 \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{y} - m_2 g \ell_2 \sin(\theta)\end{aligned}$$

substituindo nas equações e resolvendo o sistema em ordem a \ddot{y} e a $\ddot{\theta}$, obtêm-se as equações do movimento:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{\sin(\theta) (\ell_2 m_2 \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - K (y - \ell_1))}{\ell_2 (m_1 + m_2 \cos^2(\theta))} \\ \ddot{y} &= \frac{\ell_2 m_2 \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - K (y - \ell_1)}{m_1 + m_2 \cos^2(\theta)} + g\end{aligned}$$

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

3. Sistema de 3 molas e 1 massa

A energia potencial do sistema é igual à soma das energias potencias de cada uma das molas:

$$V = \sum_{\alpha=1}^3 V_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{2} k_{\alpha} (d_{\alpha} - \ell_{\alpha})^2$$

em que ℓ_{α} é o comprimento natural da mola ' α ' e d_{α} é a distância do ponto em que a mola se fixa até à massa m , ambas medidas até ao centro de m , assim:

$$d_{\alpha} = \sqrt{(x - x_{\alpha})^2 + (y - y_{\alpha})^2}$$

Por outro lado, a energia cinética do sistema é apenas a energia cinética de m :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

e o lagrangeano do sistema será então:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{2} k_{\alpha} (d_{\alpha} - \ell_{\alpha})^2$$

A partir das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

obtêm-se as equações do movimento.

$$\ddot{x} = - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{K_{\alpha}}{m} \frac{d_{\alpha} - \ell_{\alpha}}{d_{\alpha}} (x - x_{\alpha})$$

$$\ddot{y} = - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{K_{\alpha}}{m} \frac{d_{\alpha} - \ell_{\alpha}}{d_{\alpha}} (y - y_{\alpha})$$

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

4. Duas massa e três molas

Considerando o eixo dos xx' s como o eixo do movimento, x_1 a coordenada da massa m_1 e x_2 a da massa m_2 , tem-se para as energias cinética e potencial:

A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 (x_1 - \ell_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 ((x_2 - x_1) - \ell_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (((x_1 + L_1) - (x_2 + L_2)) - \ell_3)^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 (x_1 - \ell_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 ((x_2 - x_1) - \ell_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (x_1 - x_2 + L_{12} - \ell_3)^2$$

em que ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 são os comprimentos naturais das respectivas molas, x_1 é a posição do ponto em que a mola 1 se liga à massa m_1 , x_2 é a posição do ponto em que a mola 2 se liga à massa m_2 , L_1 é o comprimento da massa m_1 , L_2 é o comprimento da massa m_2 e $L_{12} = L_1 - L_2$.

Assim, o lagrangeano do sistema é:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} K_1 (x_1 - \ell_1)^2 - \frac{1}{2} K_2 ((x_2 - x_1) - \ell_2)^2 - \frac{1}{2} K_3 (x_1 - x_2 + L_{12} - \ell_3)^2$$

A partir das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

obtêm-se as equações do movimento.

$$\ddot{x}_1 = -\frac{K_1}{m_1} (x_1 - \ell_1) + \frac{K_2}{m_1} (x_2 - x_1 - \ell_2) - \frac{K_3}{m_1} (x_1 - x_2 + L_{12} - \ell_3)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{K_2}{m_2} (x_2 - x_1 - \ell_2) + \frac{K_3}{m_2} (x_1 - x_2 + L_{12} - \ell_3)$$