MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2014/2015

Trabalhos Finais (03/12/2014)

Para a realização dos trabalhos tenha em conta os seguintes pontos:

- Os trabalhos finais são realizados em grupo e serão sujeitos a uma discussão final. Cada grupo deve escolher um único trabalho.
- Todos os trabalhos realizados devem ser escritos em **C** em ambiente de janelas;
- Para construir a(s) janela(s) a utilizar no programa deve ser usada uma das bibliotecas descritas durante esta cadeira (GTK+ ou Allegro);
- Os parâmetros, bem como as ordens de execução, para a realização dos objectivos do trabalho devem poder ser dados, em tempo real, a partir das janelas de execução do programa;
- As escalas dos eixos, sempre que tal se justifique, devem poder ser alteradas a partir da janela.
- Deverão existir, sempre que tal se justifique, botões que permitam parar, continuar e recomeçar as representações gráficas.
- Concluído um gráfico, o utilizador deve ter possibilidade de optar por sobrepor um novo gráfico (quando isso tiver cabimento) ao já existente ou fazer um novo desde o início. Deverá ainda ser possível dar a ordem de limpar um gráfico já existente.
- Ao iniciar-se o programa, devem estar introduzidos os valores que permitam executar uma demonstração.
- Os cálculos efectuados para as representações gráficas deverão resultar da resolução numérica da(s) equação(ões) diferencial(is) e não a partir de soluções gerais conhecidas.
- No que respeita às dimensões do sistema, estas deverão ser implicitamente definidas internamente pelo programa de modo a ele se ajustar correctamente às dimensões do ecrã.
- Os trabalhos realizados deverão ainda ser acompanhados por um pequeno texto explicativo (uma a duas páginas) escrito em TeX ou em LaTeX.

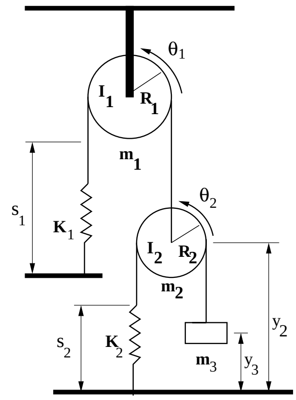
MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2014/2015

Trabalhos Finais (03/12/2014)

1. Sistema de duas molas, duas roldanas e uma massa

Considere o sistema ao lado constituído por duas molas, duas roldanas e uma massa representado ao lado. A roldana **1** está fixa e tem de massa $\mathbf{m}_1$ e raio $\mathbf{R}_1$, a roldana **2** é móvel e tem massa $\mathbf{m}_2$, e raio $\mathbf{R}_2$, a massa **3** tem de massa $\mathbf{m}_3$ e as duas molas têm constantes elásticas respectivamente $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$. Considere as roldadas aproximamente como discos cilíndricos uniformes com momento de inércia $I = m\,R^2/2$ e ainda que as massas das molas e do fio podem ser desprezáveis face às restantes massas. Despreze igualmente os efeitos resultantes do atrito nas diferentes componentes do sistema e considere que o fio não desliza nas roldanas.

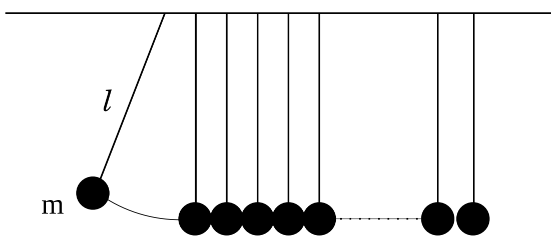


O utilizador deverá ter à sua disposição a possibilidade de alterar as massas dos objectos, o raio das roldanas e as constantes das molas. Alternativamente, poderá pedir os momentos de inércia em vez das massas das roldanas.

O programa deverá ainda poder apresentar os gráficos dos movimentos dos três objecto em questão.

2. Sistema de vários pêndulos movendo-se um plano

Seja o sistema de N pêndulos, todos iguais, de comprimento ℓ e massa m representado na figura abaixo

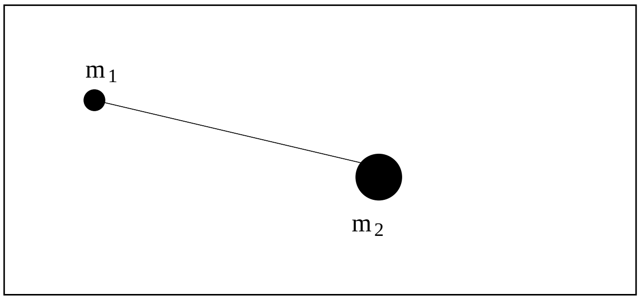


Pretende-se mostrar-se o movimento deste sistema deslocando um certo número de pêndulos do lado esquerdo e do lado direito e largá-los com uma determinada velocidade e um certo ângulo não considerando o efeito do atrito.

Assim, o utilizador deverá poder escolher o número total de pêndulos até um certo valor máximo (N), quantos se deslocam em conjunto do lado esquerdo e quantos do lado direito e os respectivos respectivos ângulos e velocidades iniciais.

3. Choque de duas massas numa mesa de ar

Considere uma mesa de ar onde se colocam dois discos de massas m_1 e m_2 de raios respectivamente R_1 e R_2. Pretende-se estudar a colisão do disco m_1 com o disco m_2, em repouso, com um parâmetro de impacto 'b'.



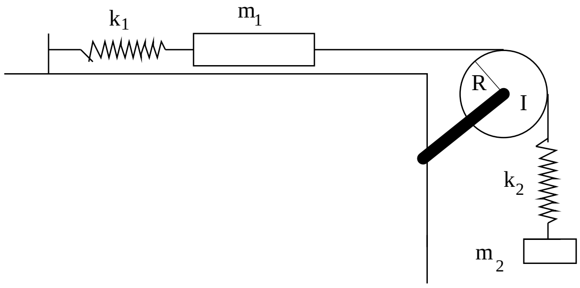
Para tal, admita que os discos ao deslocarem-se podem estar sujeitos a uma força de atrito proporcional ao seu peso e que o coeficiente de restituição no choque entre eles é dado por 'e'. Admita ainda que as colisões dos discos com as paredes da mesa são elásticas e que não são tomados em linha de conta efeitos de rotação. Mostre os movimentos dos dois discos a partir do instante em que se inicia o movimento. Para fazer o lançamento inicial poderá escolher um método à sua escolha. Ignore as colisões posteriores à primeira.

O utilizador deverá poder escolher e alterar na janela do programa os vários parâmetros do sistema, nomeadamente, as posições dos discos, a velocidade inicial do primeiro disco, valor do coeficiente de restituição, o coeficiente da força de atrito e as massas dos discos.

Mostre no rebordo da mesa de ar uma escala para melhor analisar o movimento.

4. Sistemas de duas molas, duas massas e uma roldana

Considere o sistema da figura ao lado constituído por duas molas de constantes elásticas k_1 e k_2, duas massas, m_1 e m_2, estando m_2 sujeita à acção da gravidade e uma roldana de momento de inércia I.



Admita a roldada aproximamente como um disco cilíndrico uniforme com momento de inércia $I = m\,R^2/2$, que massas das molas e do fio podem ser desprezáveis face às restantes massas e que o fio não desliza na roldana. Pode igualmente desprezar os efeitos resultantes do atrito nas diferentes componentes do sistema.

O utilizador deverá ter à sua disposição a possibilidade de alterar, em tempo real, as massas dos objectos (ou o momento de inércia no caso da roldana), as constantes das molas e as posições e velocidades iniciais das duas massas.

O programa deverá ainda poder apresentar os gráficos dos movimentos dos três objectos em questão.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

1. Sistema de duas molas, duas roldanas e uma massa

Para a obtenção das equações diferenciais do movimento o modo mais simples é recorrer às equações de Lagrange. Assim, tem-se para a energia cinética e para a energia potencial:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\, I_1\, \omega_1^2 + \tfrac{1}{2}\, I_2\, \omega_2^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, v_2^2 + \tfrac{1}{2}\, m_3\, v_3^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\, \tfrac{I_1}{R_1^2}\, \dot{y}_2^2 + \tfrac{1}{2}\, \tfrac{I_2}{R_2^2}\, (\dot{y}_3 - \dot{y}_2)^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, \dot{y}_2^2 + \tfrac{1}{2}\, m_3\, \dot{y}_3^2 \end{aligned}$$

$$V = \tfrac{1}{2}\, K_1\, (s_1 - \ell_1)^2 + \tfrac{1}{2}\, K_2\, (s_2 - \ell_2)^2 + m_2\, g\, y_2 + m_3\, g\, y_3$$

em que ℓ_1 e ℓ_2 são os comprimentos naturais das molas e ainda que as relações entre as coordenada e C_1 e C_2 duas constantes:

$$s_1 + y_2 = C_1$$

$$(y_2 - s_2) + (y_2 - y_3) = C_2$$

Eliminando s_1 e s_2, obtem-se

$$T = \tfrac{1}{2}\, (\tfrac{I_2}{R_2^2} + m_3)\, \dot{y}_3^2 + \tfrac{1}{2}\, (\tfrac{I_1}{R_1^2} + \tfrac{I_2}{R_2^2} + m_2)\, \dot{y}_2^2 - \tfrac{I_2}{R_2^2}\, \dot{y}_2\, \dot{y}_3$$

$$V = \tfrac{1}{2}\, K_1\, (C_1 - y_2 - \ell_1)^2 + \tfrac{1}{2}\, K_2\, (2\, y_2 - y_3 - C_2 - \ell_2)^2 + m_2\, g\, y_2 + m_3\, g\, y_3$$

A partir do Lagrangeano do sistema ($L = T - V$) e aplicando-lhe as equações de Lagrange:

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} - \tfrac{\partial L}{\partial y_2} = 0$$

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} - \tfrac{\partial L}{\partial y_3} = 0$$

substituindo, obtêm-se as equações do movimento.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

2. Sistema de vários pêndulos movendo-se um plano

Os cálculos para este problema são simples. Basta saber a equação do movimento de um pêndulo simples:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

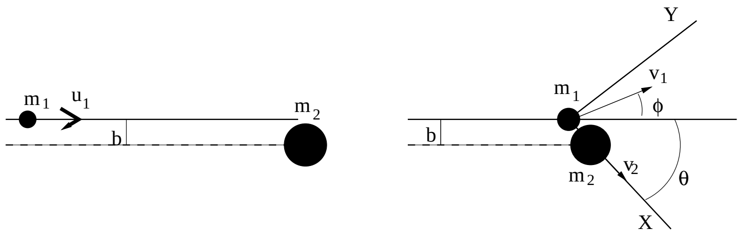
e a conservação da energia gravítica para a subida das bolas.

No que diz respeito às colisões em cadeia, há que ter em conta que as colisões não são instantâneas e que elas devem ser encaradas como sucessivas. Assim, quando uma bola bate num conjunto de outras, bate antes de mais na primeira e pára e aquela em que bateu segue com a velocidade da primeira. Só depois disso é que aquela choca com seguinte, dando o choque da mesma maneira. E isto repete-se até chegar à última que sobe com uma velocidade igual à que bateu em primeiro lugar.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

3. Choque de duas massas numa mesa de ar

Para estudar o movimento das massas na mesa de ar é necessário estudar o choque no plano entre duas massa m_1 e m_2 de raios respectivamente R_1 e R_2 sem efeitos de rotação e com um parâmetro de impacto 'b'. Seja então a figura



Antes do choque tem-se:

$$\begin{cases} b &= (R_1+R_2)\sin\theta \\ \vec{u}_1 &= u_1\cos\theta\,\vec{e}_x + u_1\sin\theta\,\vec{e}_y \\ \vec{u}_2 &= 0 \end{cases}$$

depois do choque:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= v_1\cos(\theta+\phi)\,\vec{e}_x + u_1\sin(\theta+\phi)\,\vec{e}_y \\ \vec{v}_2 &= v_2\,\vec{e}_x \end{cases}$$

e o coeficiente de restituição:

$$e = \frac{v_2 - v_1\,\cos(\theta+\phi)}{v_1\cos\theta}$$

De onde resulta, tendo em conta a conservação da quantidade de movimento e a expressão do coeficiente de restituição:

$$\begin{cases} m_1\,u_1\cos\theta &= m_1\,v_1\cos(\theta+\phi) + m_2\,v_2 \\ m_1\,u_1\sin\theta &= m_1\,v_1\sin(\theta+\phi) \\ e\,v_1\cos\theta &= v_2 - v_1\,\cos(\theta+\phi) \end{cases}$$

A solução deste sistema de equações dá:

$$\begin{cases} \tan(\theta+\phi) &= \frac{m_1+m_2}{m_1-e\,m_2}\tan\theta \\ v_1 &= \frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}\,u_1 \\ v_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\,(1+e)\,\cos\theta\,u_1 \end{cases}$$

em que θ é obtido a partir da expressão do parâmetro de impacto.

Trabalhos Finais - Nota Explicativa

4. Sistemas de duas molas, duas massas e uma roldana

Uma vez que a força da gravidade a actuar sobre um sistema massa-mola apenas dá origem ao deslocamento da posição de equilíbrio em torno da qual o corpo oscila, pode integrar-se este desvio nas coordenadas ao defini-las como os desvios em relação à posição de equilíbrio do sistema.

Têm-se então como coordenadas, x_1 e x_2 (desvios da posição de equilíbrio das massas m_1 e m_2) e θ (ângulo de rotação da roldana). No entanto, θ e x_1 estão relacionadas pela relação:

$$x_1 = -R\,\theta$$

em que o sentido positivo eixo dos xx' é definido da esquerda para a direito e o do eixo dos yy' para cima.
Assim, as energias cinética e potencial do sistemas são dadas por:

$$T = \tfrac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2 + \tfrac{1}{2}\, I\, \dot{\theta}^2$$

$$V = \tfrac{1}{2}\, k_1\, x_1^2 + \tfrac{1}{2}\, k_2\, x_2^2 + \tfrac{1}{2}\, k_1\, (x_1 + x_2)^2$$

Simplificando

$$T = \tfrac{1}{2}\, (m_1 + \tfrac{I}{R^2})\, \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2$$

$$V = \tfrac{1}{2}\, (k_1 + k_2)\, x_1^2 + \tfrac{1}{2}\, k_2\, x_2^2 + k_2\, x_1\, x_2$$

Tendo em conta que o Lagrangeano do sistema é dado por $L = T - V$, tem-se:

$$L = \tfrac{1}{2}\, (m_1 + \tfrac{I}{R^2})\, \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}\, (k_1 + k_2)\, x_1^2 - \tfrac{1}{2}\, k_2\, x_2^2 - k_2\, x_1\, x_2$$

e usando as equações de Lagrange

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \tfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

tem-se

$$(m_1 + \tfrac{I}{R^2})\, \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\, x_1 + k_2\, x_2 = 0$$

$$m_2\, \ddot{x}_2 + k_2\, x_1 + k_2\, x_2 = 0$$