MEFT - Programação

1º Ano - 1º Semestre de 2011/2012

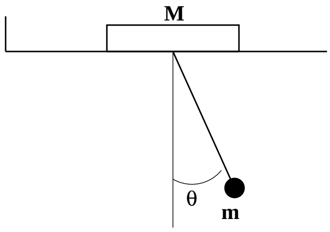
Trabalhos Finais (11/12/2011)

Para a realização dos trabalhos tenha em conta os seguintes pontos:

- Os trabalhos finais são realizados em grupo e serão sujeitos a uma discussão final. Cada grupo deve escolher um único trabalho.
- Todos os trabalhos realizados devem ser escritos em **C** em ambiente de janelas;
- Para construir a(s) janela(s) a utilizar no programa deve ser usada uma das bibliotecas descritas durante esta cadeira (GTK+ ou Allegro);
- Os parâmetros, bem como as ordens de execução, para a realização dos objectivos do trabalho devem poder ser dados, em tempo real, a partir das janelas de execução do programa;
- As escalas dos eixos, sempre que tal se justifique, devem poder ser alteradas a partir da janela.
- Deverão existir botões que permitam parar, continuar e recomeçar as representações gráficas.
- Concluído um gráfico, o utilizador deve ter possibilidade de optar por sobrepor um novo gráfico (quando isso tiver cabimento) ao já existente ou fazer um novo desde o início. Deverá ainda ser possível dar a ordem de limpar um gráfico já existente.
- Ao iniciar-se o programa, devem estar introduzidos os valores que permitam executar uma demonstração.
- Os cálculos efectuados para as representações gráficas deverão resultar da resolução numérica da(s) equação(ões) diferencial(is) e não a partir de soluções gerais conhecidas.
- Os trabalhos realizados deverão ainda ser acompanhados por um pequeno texto explicativo (uma a duas páginas) escrito em TeX ou em LaTeX.

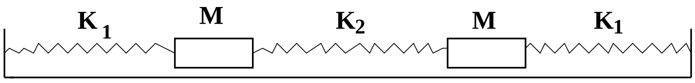
Trabalhos Finais (11/12/2011)

1. Considere o sistema ao lado constituído por um corpo de massa **M** que desliza sem atrito sobre uma plataforma e ao qual está ligado um pêndulo de comprimento ℓ no qual está sustensa uma massa **m** sujeita à acção da gravidade. Represente o seu movimento.



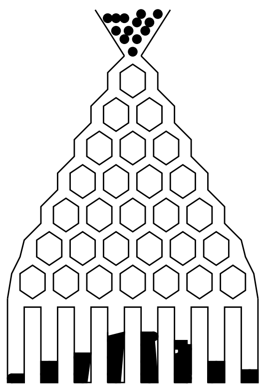
O programa dever permitir controlar os valores das massas do corpo e do pêndulo, o comprimento do pêndulo e as condições iniciais.
No caso do sistema ultrapassar os limites do gráfico, deverá aparecer no lado oposto.

2. Considere o sistema de três molas e duas massas representado na figura. Mostre o seu movimento e represente graficamente a amplitude da oscilação das duas massas. Os valores das massas, das constantes das molas e das posições iniciais devem ser dados pelo utilizador. No que diz respeito aos comprimentos das molas, podem optar por tamanhos fixos ou serem dados pelo utilizador.



3. O "hexstat" é um aparelho simples que nos permite demonstrar a distribuição binomial e, no seu limite contínuo, a distribuição normal (gaussiana). A cada nível, quando normalizado a "1" um dos extremos, tem-se o triângulo de Pascal.

O dispositivo consiste num conjunto de hexágonos organizados, como mostra a figura ao lado. As bolas são colocadas no funil superior e vão caindo. Em cada bifurcação, há 50% de probabilidades de as bolas irem para a esquerda ou para a direita.



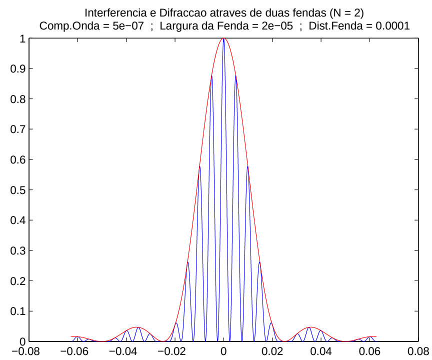
Em baixo, construa um gráfico de barras que vai contando o número de esferas que chegam a cada caixa e indica o seu número.

O utilizador poderá escolher o número de níveis existentes até um certo valor máximo e alterar o número de bolas por unidade de tempo. Deverá existir ainda uma opção que permite ver apenas o crescimento do histograma e outra em que simplesmente se dá um número total de bolas e se obtém a respectiva distribuição.

Fica ao critério da cada grupo optar por uma representação horizontal ou vertical.

Trabalhos Finais (11/12/2011)

4. A luz (bem como as partículas) possui propriedades quer corpusculares quer ondulatórias. Estas propriedades ondulatórias são particularmente evidentes quando um feixe de luz (ou de partículas) atravessa uma fenda, um conjunto de fendas ou uma rede.



Com este trabalho pretende-se fazer estudar os fenómenos de difracção e interferência da luz quando atravessa uma fenda ou duas fendas.

O utilizador deve poder optar por um dos casos (uma ou duas fendas), escolher os valores do comprimento de onda da luz incidente (λ), a largura das fendas (b) e a distâncias entre elas (a).

Para o caso das duas fendas, deverá haver uma opção em que é mostrada ou não a curva envolvente.

Deve ainda ser possível sobrepor pelo menos duas experiências.

1. Partindo das posições das massas M e m, respectivamente $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 & = & x_1\,\vec{e}_x + y_1\,\vec{e}_y & = & x_1\,\vec{e}_x \\ \vec{r}_2 & = & x_2\,\vec{e}_x + y_2\,\vec{e}_y & = & (x_1 + \ell\,sen(\theta))\,\vec{e}_x - \ell\,cos(\theta)\,\vec{e}_y \end{cases}$$

de onde se tiram as velocidades por derivação:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 & = & \dot{x}_1\,\vec{e}_x \\ \vec{v}_2 & = & (\dot{x}_1 + \ell\,cos(\theta)\,\dot{\theta})\,\vec{e}_x + \ell\,sen(\theta)\,\dot{\theta}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

e a energia cinética vem dada por:

$$\begin{array}{rcl} T & = & \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ & = & \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}_1^2 + \ell^2\,cos^2(\theta)\,\dot{\theta}^2 + 2\,\ell\,cos(\theta)\,\dot{x}_1\,\dot{\theta} + \ell^2\,sen^2(\theta)\,\dot{\theta}^2) \\ & = & \frac{1}{2}\,(M+m)\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 + m\,\ell\,cos(\theta)\,\dot{x}_1\,\dot{\theta} \end{array}$$

e a energia potencial:

$$V \;=\; -m\,g\,\ell\,cos(\theta)$$

donde o lagrangeano do sistema é dado por:

$$\begin{array}{rcl} L & = & T - V \\ L & = & \frac{1}{2}\,(M+m)\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 + m\,\ell\,cos(\theta)\,\dot{x}_1\,\dot{\theta} + m\,g\,\ell\,cos(\theta) \end{array}$$

Aplicando as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

tem-se para cada uma das coordenadas

$$\frac{d}{dt}((M+m)\,\dot{x}_1 + m\,\ell\cos(\theta)\,\dot{\theta}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2\,\dot{\theta} + m\ell\cos(\theta)\,\dot{x}_1) + m\,\ell\,sen(\theta)\,\dot{x}_1\,\dot{\theta} + m\,g\,\ell\,sen(\theta) = 0$$

logo

$$(M+m)\,\ddot{x}_1 - m\,\ell\,sen(\theta)\,\dot{\theta}^2 + m\,\ell\,cos(\theta)\,\ddot{\theta} = 0$$

$$\ell\,\ddot{\theta} + cos(\theta)\,\ddot{x}_1 + g\,sen(\theta) = 0$$

donde se tem

$$\ddot{x} = \frac{m\,\ell\,sen(\theta)\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,sen(\theta)\,cos(\theta)}{M + m\,sen^2(\theta)}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{(M+m)\,g\,sen(\theta) + m\,\ell\,sen(\theta)\,cos(\theta)\,\dot{\theta}^2}{\ell\,(M + m\,sen^2(\theta))}$$

2. Tomando os pontos de equilíbrio das duas massas, podemos escrever:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_{1_{eq}} \\ y_2 = x_2 - x_{2_{eq}} \end{cases}$$

tem-se para as acelerações das duas massas:

$$\begin{cases} m\,\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -K_1 y_1 - K_2(y_1 - y_2) \\ m\,\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -K_1 y_2 + K_2(y_1 - y_2) \end{cases}$$

Somando e subtraindo as duas equações, tem-se:

$$\begin{cases} m\,\frac{d^2}{dt^2}(y_1 + y_2) = -K_1(y_1 + y_2) \\ m\,\frac{d^2}{dt^2}(y_1 - y_2) = -K_1(y_1 - y_2) - 2K_2(y_1 - y_2) \end{cases}$$

Fazendo a substituição:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} z_1 = -\frac{K_1}{m} z_1 \\ \frac{d^2}{dt^2} z_2 = -\frac{K_1 + 2K_2}{m} z_2 \end{cases}$$

Designando:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{K_1 + 2K_2}{m}} \end{cases}$$

resulta

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} z_1 = -\omega_1^2 z_1 \\ \frac{d^2}{dt^2} z_2 = -\omega_2^2 z_2 \end{cases}$$

2. (cont.) Cálculo do desvio máximo de uma das massas.

A partir das condições iniciais podemos escrever a energia inicial (E_o):

$$E_o = T_o + V_o = \frac{1}{2}\, m\, v_{1o}^2 + \frac{1}{2}\, m\, v_{2o}^2 + \frac{1}{2}\, K_1\, x_{1o}^2 + \frac{1}{2}\, K_1\, x_{2o}^2 + \frac{1}{2}\, K_2\, (x_{1o} - x_{20})^2$$

A energia da situação de desvio máximo corresponde à situação:

$$\begin{cases} v_1(t) & = & v_2(t) & = & 0 \\ x_1(t) & = & x_{Max} \\ x_2(t) & = & 0 \end{cases}$$

Assim, a energia E_1 neste caso é dada por:

$$E_1 = 0 + 0 + \frac{1}{2}\, K_1\, x_{Max}^2 + 0 + \frac{1}{2}\, K_2\, (x_{Max} - 0)^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\, (K_1 + K_2)\, x_{Max}^2$$

A partir da lei de conservação da energia, tem-se:

$$E_o = E_1 \quad \Leftrightarrow \quad E_o = \frac{1}{2}\, (K_1 + K_2)\, x_{Max}^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{Max}^2 = \frac{2\, E_o}{K_1 + K_2}$$

logo

$$x_{Max} = \sqrt{\frac{2\, E_o}{K_1 + K_2}}$$